SOMMAIRE

- CHAPITRE 1 -

PROBLEMES D'ELASTICITE

1.1. - METHODES GENERALES DE RESOLUTION DES PROBLEMES D'ELASTICITE

1.1.1. - Rappel des formules de base

Le problème général est de déterminer l'état de contrainte dans un corps donné, soumis à des sollicitations données. Pour ceci, nous avons un certain nombre d'équations et de relations à notre disposition.

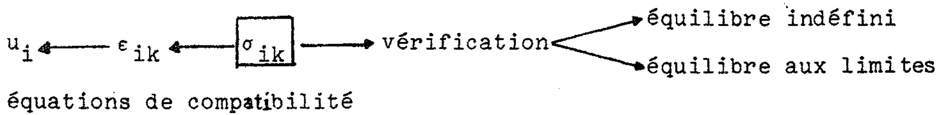
Tout d'abord, les contraintes doivent vérifier les équations d'équilibre indéfini :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + X_1 &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + X_2 &= 0 \qquad (1) \\
\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 &= 0
\end{aligned}$$

où X_i est la composante sur l'axe $\vec{i}$ de l'éffort par unité de volume appliqué sur l'élément considéré.

D'autre part, les contraintes doivent vérifier les équations d'équilibre aux limites ; si on note

$$\vec{\phi}_h \begin{vmatrix} \bar{X}_{h_1} \\ \bar{X}_{h_2} \\ \bar{X}_{h_3} \end{vmatrix}$$



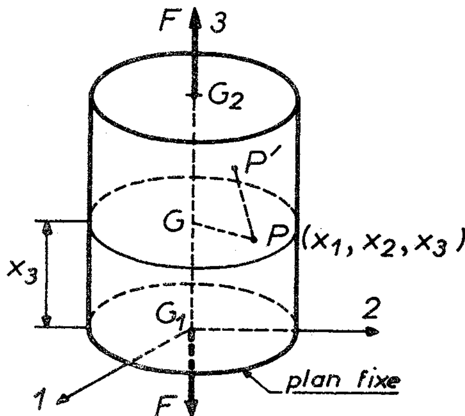
équations de compatibilité

Nous pouvons faire le choix des contraintes ; celles-ci doivent évidemment vérifier les équations d'équilibre. Mais en plus, nous devons intégrer des équations aux dérivées partielles pour déterminer les déplacements ; d'où des conditions d'intégrabilité ; ce sont les équations de compatibilité.

1.2. - TRACTION D'UN BARREAU CYLINDRIQUE DE SECTION QUELCONQUE

Choix des déplacements

Par expérience, nous avons une idée du vecteur déplacement en un point P quelconque de coordonnées (x_1,x_2,x_3) :



$$\vec{PP'} \left| \begin{array}{l} u_1 = -k' x_1 \\ u_2 = -k' x_2 \\ u_3 = kx_3 \end{array} \right. \quad (6)$$

Calcul des déformations

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -k' \qquad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = 0$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -k' \qquad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = 0 \quad (7)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = k \qquad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = 0$$

Les directions 1, 2, 3 sont donc directions principales des déformations et des contraintes.

Calcul des contraintes

On va utiliser les formules de Lamé =

$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = k - 2k'$

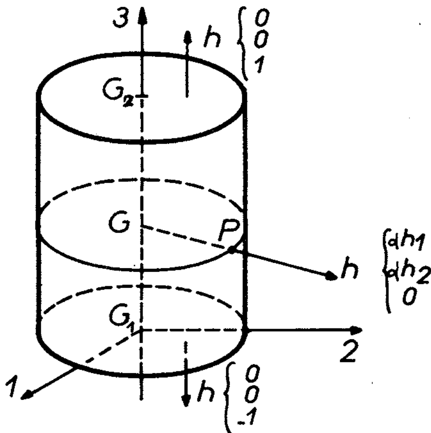
$$\begin{cases} \sigma_1 = \lambda(k - 2\,k') + 2\mu\,(-k') = C_1 \\ \sigma_2 = \lambda(k - 2\,k') + 2\mu\,(-k') = C_1 \\ \sigma_3 = \lambda(k - 2\,k') + 2\mu\,k \quad = C_2 \end{cases} \qquad (8)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$$

Equations d'équilibre

- Equilibre indéfini : les contraintes étant constantes, les équations d'équilibre indéfini seront vérifiées si les forces de volume sont nulles ou négligeables.

- Equilibre aux limites :



Sur la surface latérale on a :

$$\begin{bmatrix} X_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha h_1 \\ \alpha h_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1\,\alpha h_1 \\ C_1\,\alpha h_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Or, si la surface est libre, on doit avoir :

$$\begin{bmatrix} X_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_h \end{bmatrix} = 0$$

Ce qui entraîne : $\boxed{C_1 = 0}$

ou : $\boxed{\sigma_1 = \sigma_2 = 0}$

Sur les extrémités, nous avons :

$$\begin{bmatrix} X_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Pour que la solution convienne, il faut donc que la force F soit uniformément répartie sur les bases du cylindre. Dans ce cas :

$$\boxed{\sigma_3 = C_2 = \frac{F}{S}} \qquad (9)$$

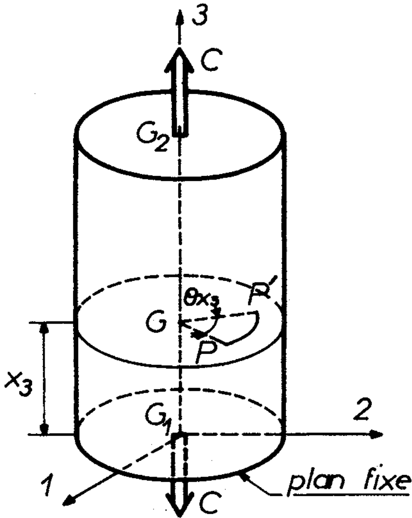
Il est évident que dans un essai de traction, l'effort total F n'est pas, en général, distribué de cette façon sur les extrémités et sa répartition dépend du type d'amar--rage utilisé. Mais si l'on s'éloigne suffisamment des extrémités, les contraintes tendent vers la répartition obtenue ; c'est la principe de St Venant.

Exercice : Déterminer l'état de contrainte dans un barreau de traction soumis, en plus, à une pression hydrostatique latérale p.

1.3. - TORSION D'UN CYLINDRE CIRCULAIRE OU D'UN TUBE

Choix des déplacements

Par expérience, nous avons également une idée du vecteur déplacement en un point quelconque.



Pour un barreau circulaire, les sections droites restent droites et le point P se déplace sur un cercle d'axe 3. En petites déformations, on a donc :

$$\vec{PP'} \quad \begin{vmatrix} u_1 = -x_2\,\theta\, x_3 \\ u_2 = \ \ x_1\,\theta\, x_3 \\ u_3 = 0 \end{vmatrix} \qquad (10)$$

où θ est la rotation par unité de longueur.

Calcul des déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = 0 \\ \varepsilon_{22} = 0 \\ \varepsilon_{33} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{12} = 0 \\ \varepsilon_{23} = \dfrac{x_1\theta}{2} \\ \varepsilon_{31} = -\dfrac{x_2\,\theta}{2} \end{cases} \qquad (11)$$

Calcul des contraintes :

Par les formules de Lamé, on a :

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \\ \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{23} = 2\mu\ \varepsilon_{23} = \mu\ x_1\theta \\ \sigma_{31} = 2\mu\ \varepsilon_{31} = -\mu\ x_2\ \theta \end{cases} \qquad (12)$$

Donc, dans une section droite, on a que des contraintes tangentielles. Elles sont perpendiculaires au rayon et proportionnelles à la distance au centre.

Equations d'équilibre :

- Equilibre indifini : les équations sont vérifiées si les forces de volume sont nulles ou négligeables.

- Equilibre aux limites : Sur la surface latérale, on a, pour une normale faisant un angle φ avec l'axe 1 :

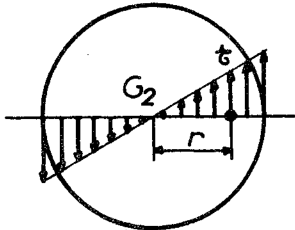
$$[X_h] = [\sigma]\,[\alpha h]$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\tau x_2\theta \\ 0 & 0 & \tau x_1\theta \\ -\tau x_2\theta & \tau x_1\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau x_2\theta\cos\varphi + \tau x_1\theta\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Or $\begin{cases} x_1 = R\cos\varphi \\ x_2 = R\sin\varphi \end{cases}$ R étant le rayon du cylindre.

Donc la troisième composante de X_h va s'écrire :

$$X_{h3} = -\tau R\theta\sin\varphi\cos\varphi + \tau R\theta\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

Donc la contrainte est bien nulle sur la surface latérale.



Sur les bases, on a les composantes σ_{31} et σ_{32} de la contrainte tangentielle soit une contrainte totale :

$$\tau = \sqrt{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2} = \tau\theta r$$

Pour que la solution soit rigoureuse, il faudrait donc que le couple de torsion soit transmis à l'éprouvette suivant cette répartition.

Le couple de torsion C peut être calculé :

$$C = \int_S \tau\, r dS$$
$$= \tau\theta\int_S r^2 dS = \tau\,\theta I_G$$

où I_G est le moment d'inertie polaire de la section.

D'où l'on peut tirer la rotation par unité de longueur :

$$\theta = \frac{C}{GI_G} \quad (\text{puisque } \mathcal{C} = G) \tag{13}$$

et la formule de la contrainte tangentielle :

$$\tau = \frac{C}{I_G} \; r \tag{14}$$

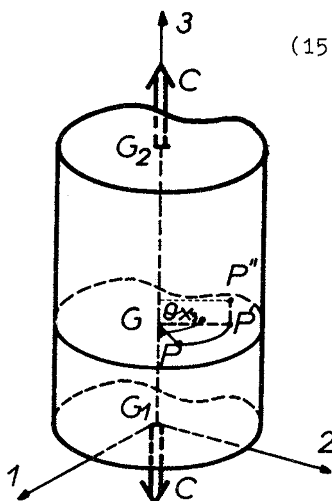
1.4. - TORSION D'UN CYLINDRE A SECTION QUELCONQUE

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que, pour les déplacements choisis, la contrainte tangentielle était perpendiculaire au rayon vecteur. Donc on ne pourra pas traiter dans ces hypothèses une section non circulaire car les conditions aux limites, sur la surface latérale, ne pourront être vérifiées. C'est pourquoi on est obligé ici d'introduire une composante u_3 du déplacement, c'est-à-dire qu'une section droite du cylindre ne restera pas plane ; il y aura gauchissement de la section.

Choix des déplacements :

$$\overrightarrow{PP''} \begin{cases} u_1 = -\, x_2 \, \theta \, x_3 \\ u_2 = \quad x_1 \, \theta \, x_3 \\ u_3 = \theta \Phi \, (x_1, x_2) \end{cases} \tag{15}$$

où Φ est une fonction de x_1 et x_2. C'est la fonction de gauchissement de S[t] Venant. Φ ne dépend pas de x_3 c'est-à-dire que toutes les sections se gauchissent de la même façon.



Calcul des déformations

$$\begin{cases}\varepsilon_{11} = 0\\ \varepsilon_{22} = 0\\ \varepsilon_{33} = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}2\,\varepsilon_{12} = 0\\ 2\,\varepsilon_{23} = \theta\,(x_1 + \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2})\\ 2\,\varepsilon_{31} = \theta\,(-\,x_2 + \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1})\end{cases} \qquad (16)$$

Calcul des contraintes

Par les formules de Lamé, on obtient :

$$\begin{cases}\sigma_{11} = 0\\ \sigma_{22} = 0\\ \sigma_{33} = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\sigma_{12} = 0\\ \sigma_{23} = G\,\theta\,(x_1 + \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2})\\ \sigma_{31} = G\,\theta\,(-\,x_2 + \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1})\end{cases} \qquad (17)$$

Equations d'équilibre

- Equilibre indéfini :

Si on néglige les forces de volume, les 2 premières équations sont identiquement nulles. La troisième équation d'équilibre donne :

$$G\theta\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^{\,2}}\right) = 0 \qquad (18)$$

soit $\boxed{\Delta\,\Phi = 0}$

Donc, la fonction de gauchissement est telle que son laplacien doit être nul dans la section.

- Equilibre aux limites :

Sur la surface latérale libre, on doit avoir :

$$\left[\overline{X}_h\right] = \left[0\right] = \begin{bmatrix}0 & 0 & \sigma_{13}\\ 0 & 0 & \sigma_{23}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha h_1\\ \alpha h_2\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \sigma_{13}\,\alpha h_1 + \sigma_{23}\,\alpha h_2\end{bmatrix}$$

soit : $\sigma_{13}\, \alpha h_1 + \sigma_{23}\, \alpha h_2 = 0$

Cette relation exprime que la contrainte tangentielle est tangente au contour. En fonction de Φ, elle s'écrit :

$$(-x_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1})\, \alpha\, h_1 + (x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2})\alpha\, h_2 = 0$$

Or, si t est la tangente unitaire au contour, ses cosinus directeurs sont :

$$\vec{t} \left| \begin{array}{l} -\alpha h_2 = \dfrac{dx_1}{ds} \\ \alpha h_1 = \dfrac{dx_2}{ds} \\ 0 \end{array} \right.$$

et l'équation précécente peut s'écrire :

$$\boxed{(-x_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1})\, dx_2 - (x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2})\, dx_1 = 0} \quad (19)$$

Le problème va donc se ramener à trouver la fonction Φ vérifiant le laplacien à l'intérieur de la section et vérifiant la relation précédente sur le contour extérieur et éventuellement sur les contours intérieurs pour les sections creuses.

Pour les extrémités du cylindre, nous allons supposer que le couple de torsion s'applique de façon répartie, conformément à la distribution obtenue pour les contraintes tangentielles. Ce couple peut se calculer en fonction de Φ :

$$C = \int_S (\sigma_{32} x_1 - \sigma_{31} x_2)\, ds$$

$$= G\,\theta \left[\int_S (x_1^2 + x_2^2)\, dS + \int_S (x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1})\, dS \right]$$

$$= G\,\theta \left[I_G + \int_S (x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1})\, dS \right] \quad (20)$$

Soit $C = G\theta I'_G$

Avec $I'_G = I_G + \int_S (x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}) dS$ (21)

A noter que si la fonction Φ est nulle, on retrouve les résultats obtenus pour le contour circulaire.

Calcul de Φ.

Il est pratique d'introduire la fonction ψ, conjuguée harmonique de Φ. Elle vérifie les conditions de Cauchy :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \quad (22)$$

La condition d'équilibre aux limites, s'écrit alors :

$$(- x_2 - \frac{\partial \psi}{\partial x_2}) dx_2 - (x_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}) dx_1 = 0$$

ou

$$(x_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}) dx_2 + (x_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}) dx_1 = 0$$

Relation qui s'intégre sous la forme :

$$\boxed{\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + \psi (x_1, x_2) = \text{constante}} \quad (23)$$

Cette équation doit être vérifiée le long du contour.

En pratique, étant donné deux fontions Φ et ψ conjuguées harmoniques, la fonction Φ est la fonction de gauchissement correspondant au contour représenté par l'équation précédente. Les fonction ψ et Φ sont obtenues en général en prenant respectivement les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique.

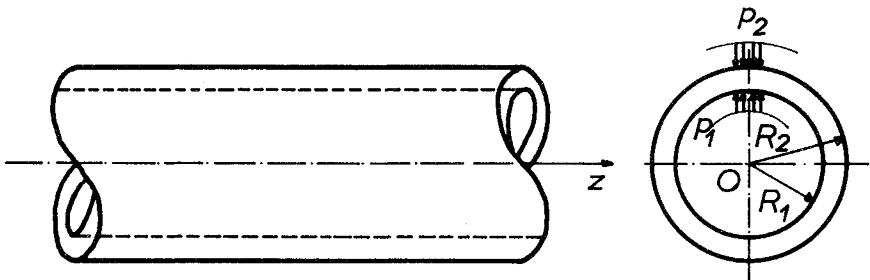
Exercice : En partant de la fonction analytique

$$f_{(z)} = a(x_1 + ix_2)^2$$

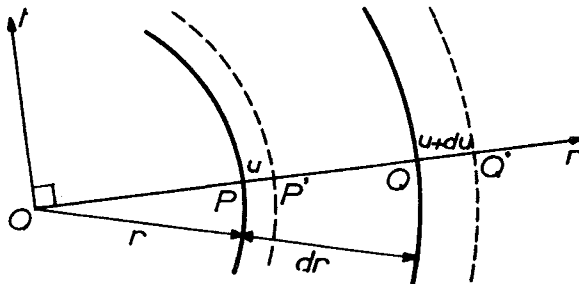
déterminer la répartition des contraintes dans une section elliptique.

1.5. - TUBE EPAIS SOUMIS A PRESSION HYDROSTATIQUE

Nous allons déterminer dans ce paragraphe l'état de contrainte dans un tube rectiligne, à paroi épaisse, soumis à une pression intérieure p_1 et une pression extérieure p_2.



Choix des déplacements



Nous allons supposer qu'une section droite du tube reste droite ; tous les points d'une même circonférence de rayon r auront le même déplacement radial u(r) par symétrie de révolution et donc aussi le même déplacement suivant l'axe z du tube ; nous n'allons pas préciser pour l'instant ce dernier.

Calcul des déformations

Nous allons raisonner en chaque point dans les axes r, t, z. Par symétrie de révolution, ce sont les directions principales des contraintes et déformations.

$$\varepsilon_r = \frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{(dr+du) - dr}{dr}$$

soit :

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{du}{dr}} \qquad (24)$$

Dans la direction circonférentielle, nous avons :

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r}$$

soit :

$$\boxed{\varepsilon_t = \frac{u}{r}} \qquad (25)$$

Enfin, nous allons poser par hypothèse que la dilatation linéaire unitaire dans la direction axiale est constante, soit :

$$\boxed{\varepsilon_z = a} \qquad (26)$$

Calcul des contraintes

Par les formules de Lamé, nous avons :

$$\sigma_r = \lambda\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + a\right) + 2\mu \frac{du}{dr}$$

$$\sigma_t = \lambda\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + a\right) + 2\mu \frac{u}{r} \qquad (27)$$

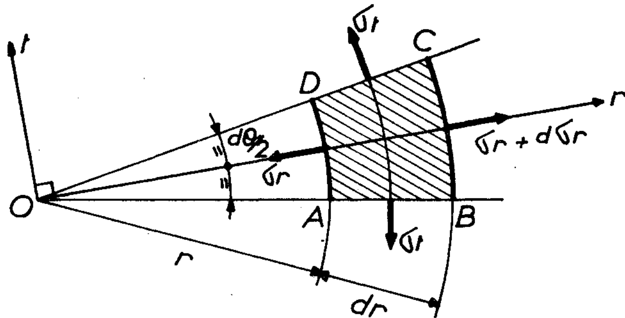
$$\sigma_z = \lambda\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + a\right) + 2\mu\, a$$

Les contraintes ne dépendent donc que de la fonction u(r) et de la constante a qui seront déterminées par les équations d'équilibre.

Equations d'équilibre

- Equilibre indéfini

Nous allons écrire les équations d'équilibre pour un élément construit dans les directions r, t, z, d'épaisseur unité.



L'équation de projection sur t est identiquement vérifiée puisque la contrainte σ_t est constante sur une circonférence, par raison de symétrie.

La projection des efforts sur r nous donne :

sur AD : $-\sigma_r\, r\, d\theta$

sur BC : $(\sigma_r + d\sigma_r)\,(r+dr)\, d\theta$

sur DC : $-\sigma_t dr \sin\frac{d\theta}{2} \simeq -\sigma_t\, dr\, \frac{d\theta}{2}$

sur AB : $-\sigma_t dr \sin\frac{d\theta}{2} \simeq -\sigma_t\, dr\, \frac{d\theta}{2}$

Au total, nous avons donc l'équation d'équilibre suivante, en négligeant les infiniment petits d'ordre 3 :

$$\sigma_r dr\, d\theta + d\sigma_r\, r\, d\theta - \sigma_t\, dr\, d\theta = 0$$

Cette équation peut encore s'écrire en divisant par $r\, dr\, d\theta$:

$$\boxed{\frac{d\sigma r}{dr} + \frac{\sigma r - \sigma t}{r} = 0} \qquad (28)$$

Nous verrons plus loin que la condition σ_z = Cte découlant de l'hypothèse ε_z = a, satisfait à l'équation d'équilibre en projection sur z.

En remplaçant σ_r et σ_t dans l'équation (28) par leur valeur en fonction de u, nous obtenons une équation différentielle que doit vérifier la fonction u(r). On obtient successivement :

$$\lambda\left[\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right] + 2\mathcal{G}\left[\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right] = 0$$

$$(\lambda + 2\mathcal{G})\left[\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right] = 0$$

soit :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0} \quad (29)$$

Résolvons cette équation en u. Elle s'écrit encore :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right) = 0$$

ou :

$$\boxed{\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ur)\right] = 0} \quad (30)$$

Par intégration, on a successsivement :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ur) = C_1$$

$$\frac{d}{dr}(ur) = C_1 r$$

$$ur = \frac{C_1 r^2}{2} + C_2$$

soit :

$$\boxed{u = \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}} \quad (31)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes.

La fonction u doit donc avoir la forme (31) pour satisfaire aux équations d'équilibre indéfini.

Nous pouvons reporter cette expression de u dans les équations (27) :

$$\sigma_r = \lambda(C_1 + a) + 2\mu \left(\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_t = \lambda(C_1 + a) + 2\mu \left(\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_z = \lambda(C_1 + a) + 2\mu\, a$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\begin{cases} \sigma_r = A - \dfrac{B}{r^2} \\ \sigma_t = A + \dfrac{B}{r^2} \\ \sigma_z = C \end{cases}$$

où A, B, C sont des constantes. Celles-ci seront déterminées par les conditions aux limites.

- <u>Equilibre aux limites</u>

L'équilibre sur les surfaces latérales va nous permettre de déterminer A et B. En effet :

pour $r = R_1$, on doit avoir $\sigma_r = -p_1$

et pour $r = R_2$, on doit avoir $\sigma_r = -p_2$

soit, d'après (32) =

$$\begin{cases} - p_1 = A - \dfrac{B}{{R_1}^2} \\ - p_2 = A - \dfrac{B}{{R_2}^2} \end{cases}$$

D'où l'on tire :

$$
\begin{cases}
A = \dfrac{p_1 R_1^{\,2} - p_2 R_2^{\,2}}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}} \\[2ex]
B = \dfrac{p_1 - p_2}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}} \quad R_1^{\,1} R_2^{\,2}
\end{cases}
\qquad (33)
$$

Donc, pour un tube de rayons R_1 et R_2, soumis à une pression intérieure p_1 et une pression extérieure p_2, les contraintes σ_r et σ_t s'écrivent :

$$
\boxed{\sigma_{\substack{r\\t}} = \frac{p_1 R_1^{\,2} - p_2 R_2^{\,2}}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}} \mp \frac{p_1 - p_2}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}} \; \frac{R_1^{\,2} R_2^{\,2}}{r^2}} \qquad (34)
$$

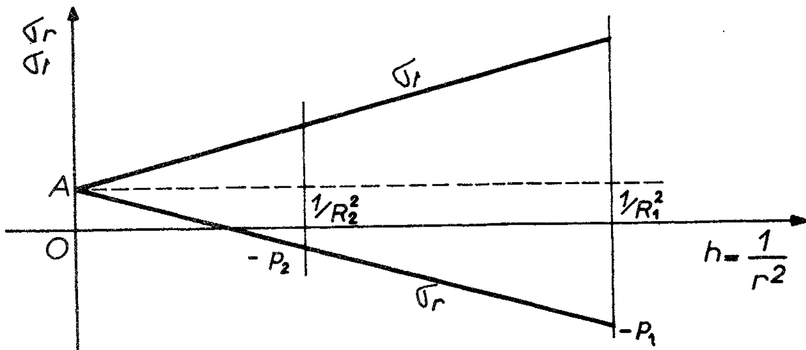
<u>Remarque</u> : <u>Epure du Général VIRGILE</u>

C'est la représentation graphique des contraintes σ_r et σ_t en fonction de $1/r^2$.

Si l'on pose $h = \dfrac{1}{r^2}$, ces contraintes s'écrivent :

$$
\sigma_{\substack{r\\t}} = A \mp Bh
$$

c'est-à-dire qu'elles sont représentées en fonction de h par deux droites symétriques par rapport à la droite horizontale de cote A.

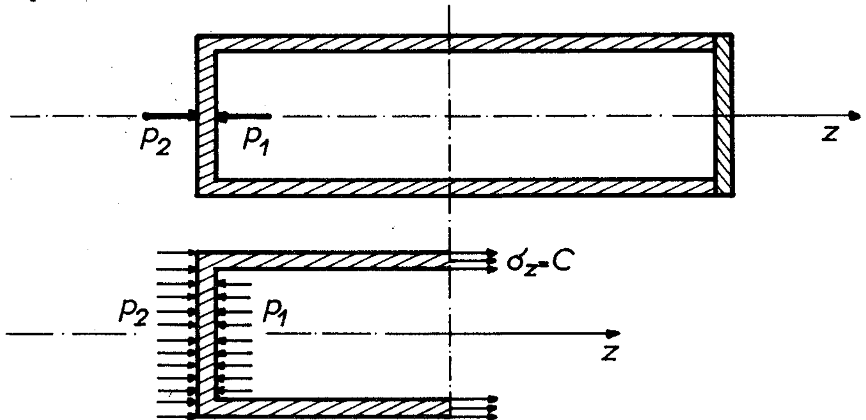


Cette épure nous montre en particulier que l'état de contrainte le plus dangereux se trouve à l'intérieur du tube.

Il nous reste maintenant à écrire l'équilibre sur les extrémités du tube. Plusieurs cas peuvent être considérés :

1) Tube à extrémités fermées :

Faisons une coupe du tube perpendiculairement à son axe et écrivons l'équilibre en projection sur z de l'une des parties :



$$\sigma_z \pi (R_2^2 - R_1^2) - p_1 \pi R_1^2 + p_2 \pi R_2^2 = 0$$

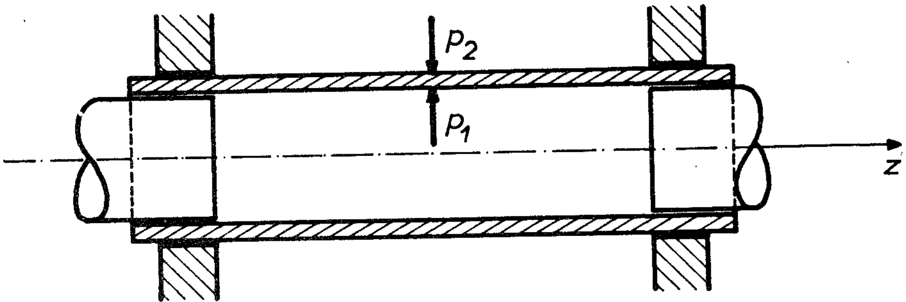
soit :

$$\sigma_z = \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = C \qquad (35)$$

Donc dans ce cas :

$$\boxed{\sigma_z = A = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{2}} \qquad (36)$$

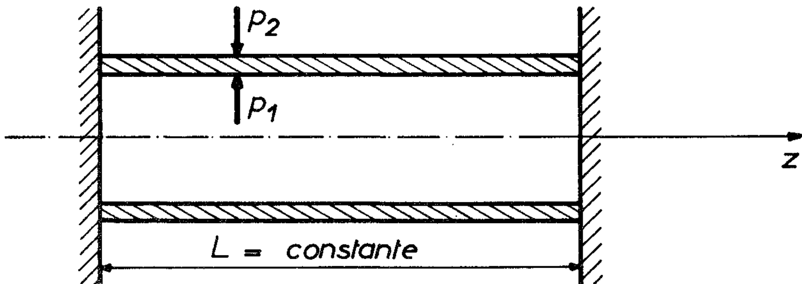
2) Tube ouvert :



Une coupe transversale et une équation de projection sur z comme dans le cas précédent, va nous donner :

$$\boxed{\sigma_z = 0} \qquad (37)$$

3) Extrémités bloquées :



Nous avons la condition $\varepsilon_z = 0$

soit :

$$\frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_t)\right] = 0$$

d'où :

$$\boxed{\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_t) = 2\nu A} \qquad (38)$$

Exercices : 1) Etant donné un tube de rayons R_1 et R_2, d'épaisseur e, supportant une pression intérieure p_1 seule, déterminer par le critère de Rankine, la pression limite que peut supporter le tube. On appellera σ_e la limite élastique du matériau en traction.

Réponse : $$p_{1\,lim} = \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2 + R_1^2}\,\sigma_e$$

Inversement, en déduire l'épaisseur minimum pour supporter une pression donnée :

Réponse : $$e \geqslant R\left(\sqrt{\frac{\sigma_e + p_1}{\sigma_e - p_1}} - 1\right)$$

2) Mêmes questions par le critère de Tresca :

Réponses : $$p_{1lim} = \frac{\sigma_e}{2}\,\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2}$$

$$e \geqslant R_1\left(\sqrt{\frac{\sigma_e}{\sigma_e - 2p_1}} - 1\right)$$

1.6. - FLEXION PURE

1.6.1. - Conditions de compatibilité

Si au lieu de faire le choix des déplacements, nous partons des contraintes et des déformations, celles-ci doivent satisfaire aux conditions de compatibilité. En effet, les six composantes de la déformation sont complètement déterminées par les trois fonctions u_1, u_2 et u_3. Ce ne sont donc pas des fonctions arbitraires de x_1, x_2 et x_3, mais des fonctions qui dépendent des équations (5).

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

Pour trouver ces conditions de compatibilité, faisons les dérivations suivantes :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \, \partial x_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \, \partial x_2}$$

$$2 \, \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \, \partial x_2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \, \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \, \partial x_2}$$

ce qui nous permet d'établir une première condition :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \, \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \, \partial x_2} \qquad (39)$$

Nous avons deux autres équations du même genre par permutation circulaire.

D'autre part, les relations :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \, \partial x_3} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \, \partial x_2 \, \partial x_3}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \, \partial x_3}\right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \, \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \, \partial x_2}\right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \, \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \, \partial x_3}\right)$$

permettent d'écrire la condition :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2\, \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2}\right) \qquad (40)$$

De même, nous avons deux autres conditions par permutation circulaire des indices.

Au total, nous avons donc six conditions de compatibilité :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_2^2} = 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1\, \partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2\, \partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3\, \partial x_1}$$

$$(41)$$

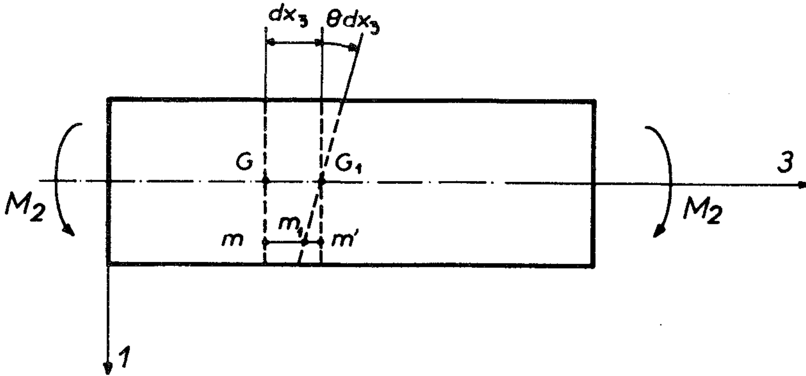
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2\, \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1\, \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1\, \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}\right)$$

1.6.2. - Application à la flexion

- Choix des déformations



Considérons deux sections droites voisines G et G_1, distantes de dx_3. La section droite G_1 tourne par rapport à la section G d'un angle θdx_3, θ étant donc la rotation par unité de longueur au point considéré. Nous pouvons alors, dans ces hypothèses, exprimer la dilatation linéaire unitaire d'un petit élément mm' :

$$\varepsilon_{33} = \frac{mm_1 - mm'}{mm'} = \frac{(dx_3 - \theta dx_3 x_1) - dx_3}{dx_3}$$

soit

$$\varepsilon_{33} = -\theta x_1 \qquad (42)$$

En supposant que cette fibre est uniquement en contrainte uniaxiale, nous avons, par analogie avec l'essai de traction :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\nu\varepsilon_{33} = \nu\theta x_1 \qquad (43)$$
$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$$

Donc finalement les directions 1, 2, 3 sont directions principales des déformations, soit :

$$\begin{cases} \varepsilon_3 = -\theta x_1 \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \nu\theta x_1 \end{cases} \qquad (44)$$

- Vérification des équations de compatibilité

Les déformations étant du premier degré en x_i, les conditions de compatibilité (41) sont automatiquement vérifiées.

- Calcul des contraintes :

Par les formules de Lamé, on a :

$$\sigma_1 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_1$$
$$= \lambda(2\nu\,\theta x_1 - \theta x_1) + 2\mu\,\nu\theta\, x_1$$
$$= \left[\lambda(2\nu - 1) + 2\mu\nu\right]\theta x_1$$
$$= \left[\frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}(2\nu - 1) + \frac{E}{1+\nu}\nu\right]\theta x_1 = 0$$

De même pour σ_2.

Donc
$$\begin{cases}\sigma_1 = 0\\ \sigma_2 = 0\end{cases} \qquad (45)$$

D'autre part :

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right] = \frac{\sigma_3}{E}$$

soit : $\sigma_3 = E\varepsilon_3$

$$\boxed{\sigma_3 = -E\,\theta x_1} \qquad (46)$$

- Equations d'équilibre

1) Equilibre indéfini

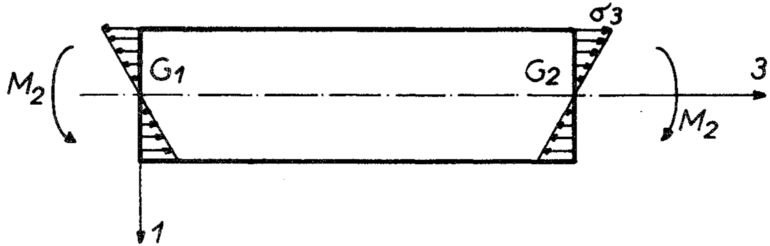
σ_3 étant la seule contrainte non nulle et ne dépendant pas de x_3, les équations d'équilibre (1) sont vérifiées si les composantes X_i de l'effort par unité de volume sont nulles.

2) Equilibre aux limites

. Surfaces latérales :

Pour toute normale $\vec{h}$ perpendiculaire à l'axe 3, nous obtenons $\vec{\Phi}_h = 0$, ce qui est la condition relative à une surface libre.

. Bases :



Pour que les conditions aux limites sur les bases soient vérifiées, il faut que le moment appliqué à l'éprouvette soit transmis par un effort réparti comme la contrainte σ_3.

On peut alors déterminer la relation entre θ et M_2.

$$M_2 = \int_S \sigma_3 \, x_1 \, dS$$

$$= -\int_S E \, \theta \, x_1^2 \, dS$$

$$= - E \, \theta \int_S x_1^2 \, dS$$

Or l'intégrale représente le moment d'inertie I_2 de la section par rapport à l'axe 2. A noter que cet axe doit être axe principal d'inertie afin que les contraintes σ_3 ne donnent pas de moment sur l'axe 1. On a donc :

$$M_2 = - E\theta \, I_2 \qquad (47)$$

ou encore :

$$\boxed{\theta = - \frac{M_2}{EI_2}} \qquad (48)$$

La formule (46) nous permet également d'avoir la formule de la contrainte :

$$\boxed{\sigma_3 = \frac{M_2}{I_2} \, x_1} \qquad (49)$$

1.7. - ELASTICITE PLANE

1.7.1. - Conditions de compatibilité

Nous allons supposer que le plan de contrainte est le plan 1, 2. Donc en tout point du corps, on a :

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0 \qquad (50)$$

et σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} ne sont fonction que de x_1 et x_2.

Les lois de Hooke nous donnent alors :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11})$$

$$\varepsilon_{3} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \qquad (51)$$

$$2\,\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\,\sigma_{12}$$

$$2\,\varepsilon_{23} = 2\,\varepsilon_{31} = 0$$

ce qui permet de dire que ε_{11}, ε_{22} et ε_{12} ne sont aussi fonctions que de x_1 et x_2.

Nous constatons alors que la 4e et la 5e des conditions de compatibilité (41) sont toujours vérifiées. Les équations 2, 3 et 6 expriment que les dérivées secondes de ε_3 doivent être nulles ; on ne les prendra pas en général en considération et on ne retiendra que la première :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1\,\partial x_2} \qquad (52)$$

Celle-ci s'écrit, en fonction des contraintes, compte tenu de (51) :

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - (1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right) = 2(1+\nu)\,\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1\,\partial x_2} \qquad (53)$$

Or les deux premières équations d'équilibre (1) donnent par dérivation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \qquad (54)$$

La condition de compatibilité (53) devient alors, avec (54) :

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right) \qquad (55)$$

Très souvent on néglige les efforts par unité de volume X_1 et X_2.

(55) se simplifie alors pour donner :

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \qquad (56)$$

1.7.2. - Fonction d'Airy

Un problème d'élasticité à deux dimensions revient donc à déterminer les trois fonctions σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} satisfaisant aux deux équations d'équilibre (54) et l'équation de compatibilité (55) ou (56), ainsi que les conditions aux limites.

La méthode habituelle utilisée pour résoudre ces équations différentielles, consiste à introduire une nouvelle fonction $\Phi(x_1, x_2)$, appelée fonction de contrainte ou fonction d'Airy, dont on tire les contraintes par :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}$$

$$\sigma_{12} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad (57)$$

Si les forces volumiques sont nulles, nous pouvons remarquer que ces contraintes vérifient les équations d'équilibre (54) quelle que soit la fonction Φ.

Φ doit donc vérifier la condition de compatibilité (56). Or :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = \Delta\Phi$$

L'équation (56) devient donc :

$$\boxed{\Delta(\Delta\Phi) = 0} \qquad (58)$$

ou en explicitant :

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} = 0 \qquad (58')$$

Donc la solution du problème est réduite à la recherche des solutions de (58) qui satisfassent aux conditions aux limites.

1.7.3. - Exemples

Nous pouvons chercher la solution de (58) sous forme d'un polynôme. Pour plus de simplicité, nous pouvons même regarder ce que donne des monômes de degrés différents et utiliser le principe de superposition pour trouver une solution qui satisfasse aux conditions aux limites données.

1) 2e degré

Sinnous choisissons comme fonction de contrainte, la fonction :

$$\Phi_1 = \frac{b x_2^2}{2} \qquad (59)$$

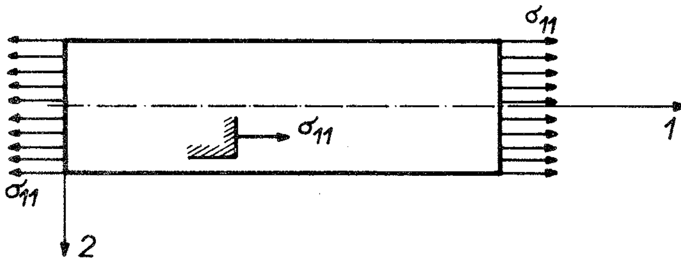
l'équation de compatibilité (58) est alors vérifiée.

Nous avons par ailleurs :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = b$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = 0 \qquad (60)$$

$$\sigma_{12} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \, \partial x_2} = 0$$



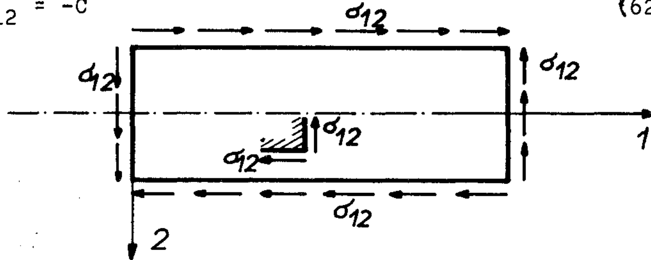
Donc nous avons un état de contrainte uniaxiale, constant dans tout le corps ; ce sera, par exemple, le cas d'une plaque rectangulaire soumise à traction pure. Les conditions aux limites seront vérifiées si l'effort de traction aux extrémités est réparti comme la contrainte σ_{11}.

- Si nous choisissons maintenant comme fonction de contrainte, la fonction :

$$\Phi_2 = c \, x_1 \, x_2 \qquad (61)$$

l'équation de compatibilité (58) est toujours vérifiée et nous avons :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 0 \\ \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{12} = -C \end{cases} \qquad (62)$$



Cet état de contrainte correspond à un cisaillement pur. Pour que les conditions aux limites soient vérifiées, il faut que les efforts de cisaillement soient uniformément répartis sur les côtés :

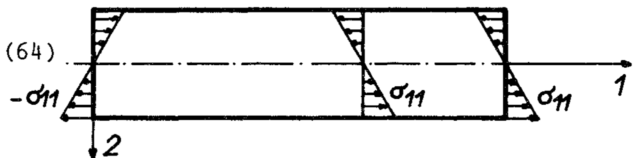
2) 3e degré

Considérons la fonction de contrainte :

$$\Phi_3 = \frac{bx_2^{\ 3}}{6} \qquad (63)$$

L'équation de compatibilité est toujours vérifiée et on a :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = bx_2 \\ \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{12} = 0 \end{cases} \qquad (64)$$



C'est l'état de contrainte correspondant à un état de flexion pure. Là encore, les conditions aux limites seront vérifiées si les moments deflexion sont dus à des efforts répartis linéairement sur les extrémités, comme la contrainte σ_{11}.

3) 4e degré

Si nous prenons un polynôme homgène du 4e degré :

$$\Phi = \frac{bx_2^{\,4}}{12} + \frac{cx_1x_2^{\,3}}{6} + \frac{dx_1^{\,2}x_2^{\,2}}{2} + \frac{ex_1^{\,3}x_2}{6} + \frac{fx_1^{\,4}}{12} \qquad (65)$$

l'équation de compatibilité n'est pas automatiquement satisfaite ; elle conduit à la relation entre les coefficients :

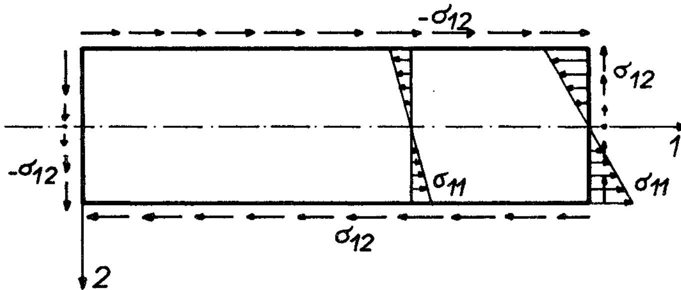
$$b + f + 2d = 0 \qquad (66)$$

Etudions le cas particulier :

$$\Phi_4 = \frac{c\ x_1\ x_2^{\,3}}{6} \qquad (67)$$

Les contraintes correspondantes sont :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = c\ x_1\ x_2 \\ \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{12} = -\ c\ \dfrac{x_2^{\,2}}{2} \end{cases} \qquad (68)$$



Dans une section droite, σ_{11} varie linéairement comme dans le cas de la flexion, mais son intensité est variable en fonction de x_1 ; c'est la répartition correspondant à une plaque encastrée à une extrémité et chargée à l'autre.

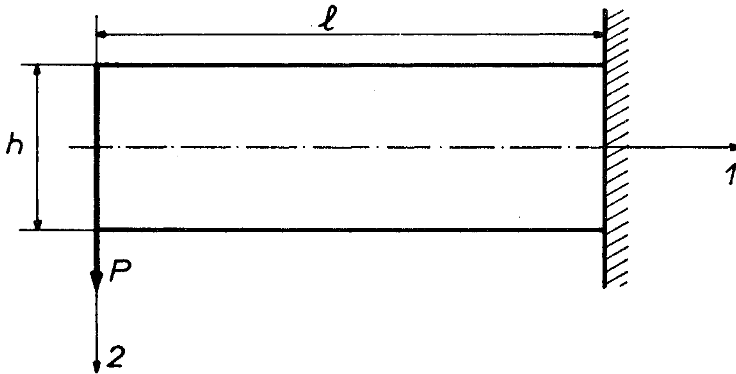
Quant à la contrainte tangentielle, elle est constante sur les bords longitudinaux et varie paraboliquement sur les extrémités. Elle ne correspond pas à un essai bien particulier ; mais on pourra associer à Φ_4 une fonction du type Φ_2 pour éliminer ces contraintes tangentielles sur les bords longitudinaux.

4) Exercice :

En prenant pour Φ :

$$\Phi = c\, x_1\, x_2 + d\, \frac{x_1 x_2^3}{6}$$

étudier la flexion d'une poutre encastrée, chargée à son extrémité.

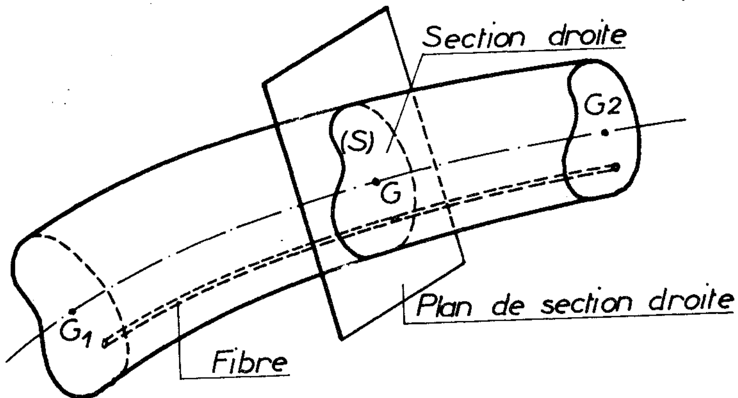


- C H A P I T R E 2 -

THEORIE DES POUTRES

2.1. - GENERALITES SUR LES POUTRES

2.1.1. - Définitions



On nomme poutre un corps dont le volume est engendré de la manière suivante par une surface plane (S) :

- son centre de gravité G décrit une ligne continue G_1G_2, plane ou gauche, appelée ligne moyenne de la poutre ou axe longitudinal.

- le plan contenant (S) est constamment normal à la ligne moyenne ainsi qu'à la ligne décrite par chacun de ses points.

- la surface (S) est supposée soit invariable soit à variation faible et progressive (poutre à inertie variable) et ses cotes sont faibles par rapport à la longueur de la ligne moyenne.

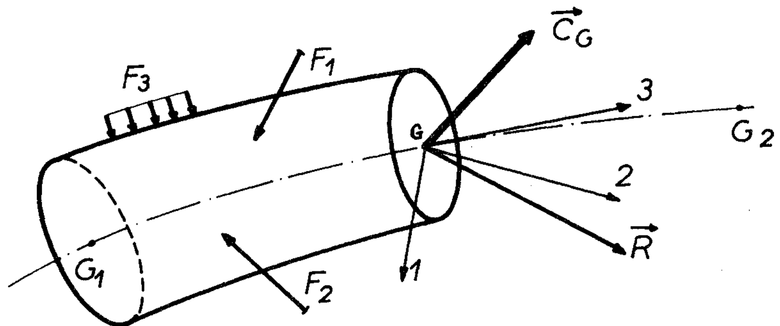
- si la ligne moyenne est courbe, elle a, en chaque point, un rayon de courbure grand par rapport aux dimensions de la section.

La surface (S) s'appelle section droite de la poutre.

Une fibre est une partie infiniment petite de la poutre dont le volume est engendrée par un élément dS de S.

Lorsque la ligne moyenne est plane, on a une poutre plane ; dans ce cas, le plan contenant la ligne moyenne est appelé plan moyen. Lorsque la ligne moyenne est une droite, on a une poutre droite.

2.1.2. - Torseur de gauche



Soit une poutre de ligne moyenne G_1G_2, en équilibre sous l'action de forces extérieures. Considérons la partie de cette poutre limitée par l'extrémité G_1 et une section droite quelconque G. On appelle torseur des forces de gauche ou torseur de gauche, le torseur des forces appliquées sur la partie isolée G_1G de la poutre.

Considérons en G un système d'axes trirectangles 1, 2, 3, l'axe 3 étant tangent à la ligne moyenne, les axes 1 et 2 étant donc dans la section droite.

Le torseur de gauche (variable avec G) peut être caractérisé en G par :

- sa résultante générale $\vec{R}$, de composantes sur 1, 2, 3 :

$$\underset{(1,2,3)}{\vec{R}} \left| \begin{array}{ll} T_1 \\ T_2 \end{array} \right\} \text{ efforts tranchants} \\ N \quad \text{effort longitudinal}$$

- son moment résultant en G, $\vec{C}_G$, de composantes sur 1, 2, 3 :

$$\underset{(1.2,3)}{\vec{C}_G} \left| \begin{array}{ll} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\} \text{ moments fléchissants} \\ M_3 \text{ ou } M_t \quad \text{moment de torsion}$$

Les variations de ces différentes composantes, en fonction de la position de G sur la ligne moyenne, forment les diagrammes fondamentaux du torseur de gauche.

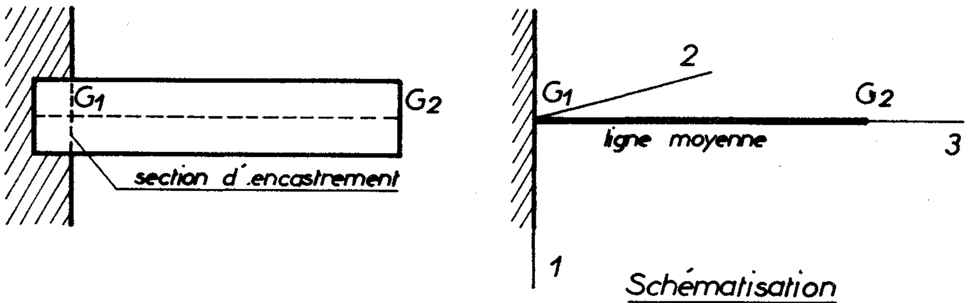
Remarque : on aurait pu choisir d'isoler la partie droite GG_2 de la poutre. Pour une poutre en équilibre, il est évident que les torseurs de gauche et de droite sont opposés.

2.1.3. - Liaisons

Pour pouvoir faire l'étude du torseur de gauche, il faut d'abord étudier et schématiser les actions dues aux liaisons de la poutre avec l'extérieur.

1) Encastrement

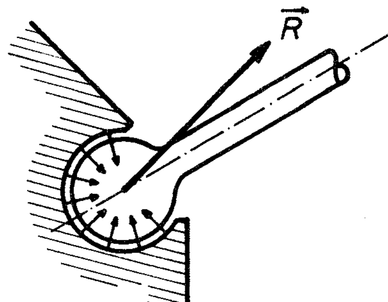
L'encastrement est une liaison qui empêche tout mouvement relatif de la section encastrée par rapport au corps réalisant l'encastrement.



Le torseur des actions de contact se réduit en G_1 à une résultante $\vec{R}$ (réaction d'encastrement) et un moment résultant $\vec{C}$ (moment d'encastrement). Dans le cas général, chacun de ces vecteurs a 3 composantes ; il y a donc 6 inconnues à déterminer pour connaître ce torseur d'encastrement.

Dans le cas particulier d'une poutre plane chargée dans son plan, le torseur d'encastrement, opposé au torseur des forces appliquées, a obligatoirement sa résultante dans le plan de la poutre et son moment résultant perpendiculaire à ce plan ; donc au total, il y a 3 composantes inconnues.

2) Articulation sphérique ou rotule



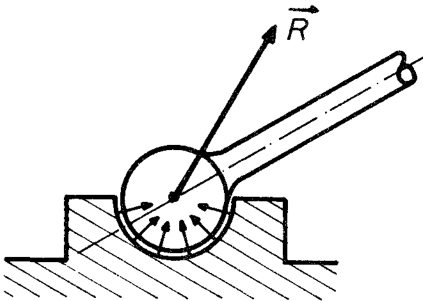
Il y a rotule si la poutre peut pivoter autour d'un point fixe, centre de la rotule sphérique. Si l'on fait l'hypothèse que les frottements sont négligeables, les actions de contact passent toutes par le centre de la rotule et sont donc équivalentes à une force unique $\vec{R}$ passant par ce point. La rotule fait donc intervenir, dans l'espace, 3 inconnues qui sont les composantes de $\vec{R}$.

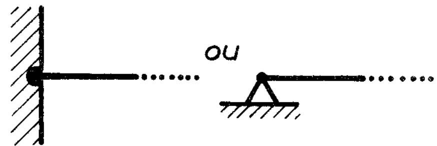
3) Articulation ou appui cylindrique

- Appui fixe :

Il y a articulation cylindrique si la poutre peut pivoter autour d'une droite fixe. Si les frottements sont négligeables , les actions de contact se réduisent à une force passant par cet axe et normale à cet axe.

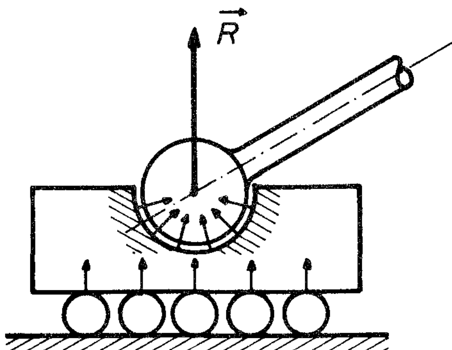
Donc, l'appui cylindrique donne une réaction avec seulement deux composantes inconnues.





Schématisation

- Appui glissant :





Schématisation

L'action du socle sur l'appui se réduit à une force normale à la surface du socle. Pour que l'appui soit en équilibre, il faut donc que les actions de l'appui sur la poutre se réduisent également à une telle force.

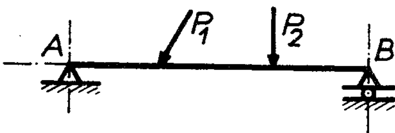
Donc l'appui glissant donne une réaction normale à la surface d'appui ; il n'y a qu'une composante inconnue.

2.1.4. - Classification des systèmes

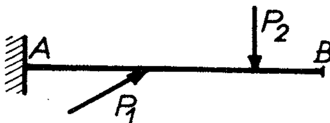
1) Systèmes isostatiques

Définition : on dit qu'un système est statiquement déterminé ou isostatique lorsque les seules équations de la statique permettent de calculer les actions de contact avec l'extérieur et le passage des efforts à l'intérieur de la structure.

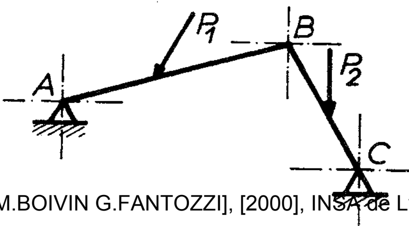
Exemples :



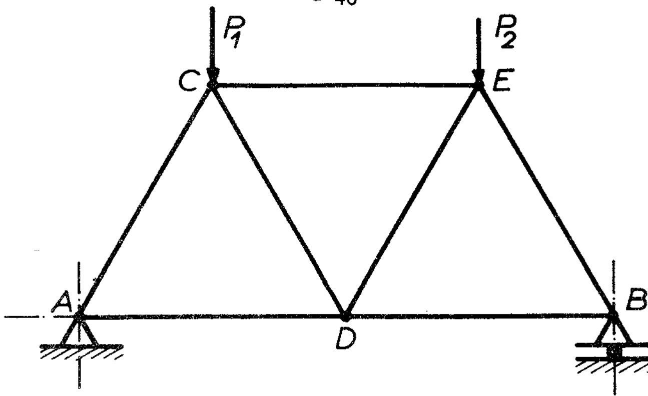
Poutre sur appuis simples, avec chargement plan : 3 équations et 3 inconnues.



Poutre encastrée : 6 équations et 6 inconnues (3 équations et 3 inconnues dans le cas du chargement plan)

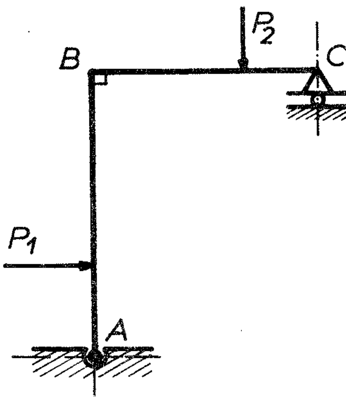


Poutres articulées planes : 6 inconnues et 6 équations (3 par poutre).



Système triangulé plan : l'équilibre global du système nous permet de calculer les réactions en A et B. Le système est dit isostatique externe. Pour qu'il soit isostatique interne, il faut en plus pouvoir déterminer les efforts dans les barres. Or, dans les hypothèses classiques des systèmes triangulés articulés et chargés aux noeuds, chaque barre est soumise uniquement à un effort longitudinal de traction ou compression. En écrivant l'équilibre d'un noeud, on pourra donc déterminer les efforts dans les barres arrivant à ce noeud s'il y a au plus deux efforts inconnus. Le système sera donc isostatique interne si on peut le décrire noeud par noeud, en ayant chaque fois au plus 2 inconnues. Par exemple, dans notre cas, on peut déterminer les efforts dans toutes les barres en partant du noeud A (AB et AC) puis C (CE et CD), puis D (DB, DE) et E (EB). Il est donc isostatique. La résolution graphique d'un tel système conduit au tracé du Crémona.

Systèmes continus : ce sont des systèmes formés de poutres droites reliées par des noeuds rigides. Dans notre cas de figure, où le système est plan, nous avons 3 inconnues et 3 équations ; il est donc isostatique.



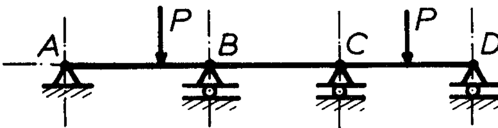
2) Systèmes hyperstatiques

Définition : on dit qu'un système est statiquement indéterminé ou hyperstatique si les seules équations de la statique ne permettent pas de calculer :

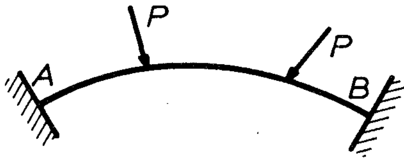
- les actions de contact avec l'extérieur ; il s'agit alors d'hyperstaticité externe ;
- le passage des efforts à l'intérieur de la structure ; il s'agit alors d'hyperstaticité interne.

Un système peut être à la fois hyperstatique interne et externe. On appelle degré d'hyperstaticité, le nombre d'inconnues surabondantes par rapport au nombre d'équations données par la statique.

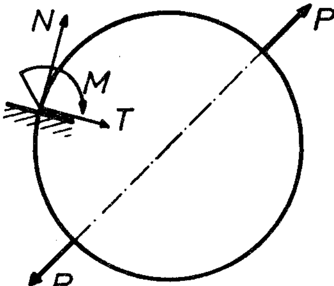
Exemples :



Poutre continue : 5 inconnues et 3 équations ; donc système hyperstatique externe de degré 2.

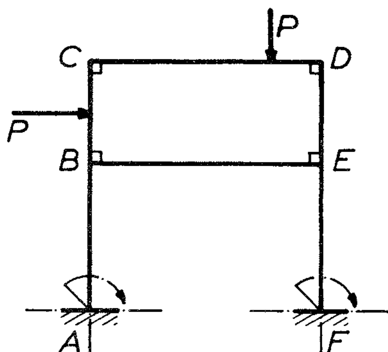


Poutre ou arc biencastré plan : 6 inconnues et 3 équations ; donc système hyperstatique externe de degré 3.



Cadres et anneaux : les équations d'équilibre sont vérifiées si les 2 charges sont directement opposées. Mais pour connaître le passage des efforts dans la structure, il faut connaître

le torseur de gauche en un point. Donc dans notre cas plan, il y a 3 inconnues supplémentaires ; donc système hyperstatique interne de degré 3.



Structures composées : la structure continue ci-contre présente un cadre donc une hyperstaticité interne de degré 3, ainsi qu'une hyperstaticité externe de degré 3 ; donc au total, c'est un système hyperstatique de degré 6.

2.1.5. - Diagrammes fondamentaux

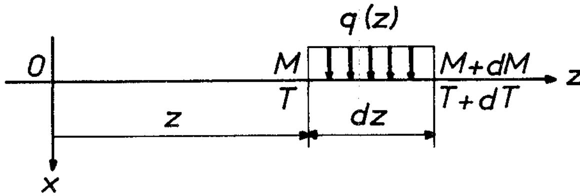
Comme nous le verrons plus loin, il est essentiel de déterminer, pour le calcul des contraintes, les diagrammes fondamentaux, ou plus précisément les valeurs extrêmes de ceux-ci.

1) Poutres droites

Nous allons démontrer des relations entre le coefficient de charge q(z), l'effort tranchant T et le moment fléchissant M pour des poutres droites soumises à des sollicitations planes normales aux poutres. A ce sujet, définissons d'abord ce qu'est un coefficient de charge : q(z) est, lorsqu'il y a une charge répartie sur la poutre, l'intensité de cette charge à la cote z. C'est donc une charge par unité de longueur qui s'exprimera par exemple en daN/m. q(z) peut être une fonction quelconque de z ; en particulier si q(z) est une constante, on dit qu'on a une charge uniformément répartie ; si q(z) est du premier degré et s'annule à une extrémité de la poutre, on dit qu'on a une charge triangulaire... On peut d'autre part démontrer que,

du point de vue de la statique, une charge répartie est équivalente à une charge concentrée parallèle à la charge répartie, égale à la surface du diagramme représentant la charge répartie q (z) et passant par le centre de gravité de cette surface.

Considérons maintenant un élément dz de la poutre sur lequel s'exercent ni charge concentrée, ni couple concentré mais seulement une charge répartie q(z) qui peut être considérée comme constante sur l'élément dz.



A la cote z, l'effort tranchant et le moment fléchissant sont T et M ; à la cote z + dz, ils sont T + dT et M + dM.

Si on calcule l'effort tranchant en z + dz, on a alors :

$$T + dT = T + q(z)\,dz$$

d'où on tire :

$$\frac{dT}{dz} = q(z) \qquad (69)$$

<u>La dérivée de l'effort tranchant est le coefficient de charge</u>.

Si on calcule maintenant le moment fléchissant en z + dz, on obtient :

$$M + dM = M - Tdz - qdz \times \frac{dz}{2}$$

soit, en négligeant l'infiniment petit du 2e ordre :

$$\frac{dM}{dz} = - T \qquad (70)$$

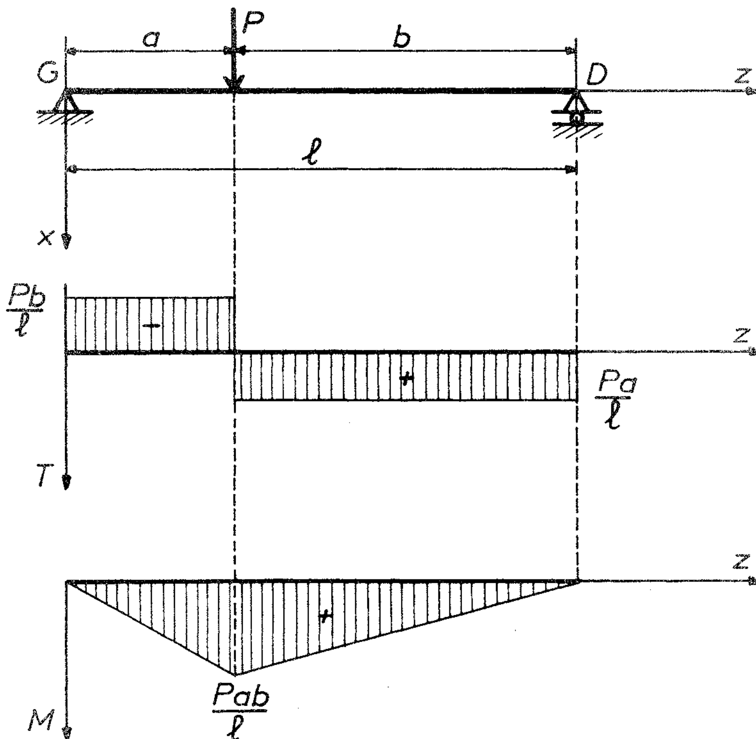
<u>La dérivée du moment fléchissant est égale à l'opposé de l'effort tranchant</u>.

En conséquence, nous pouvons dire que l'effort tranchant présentera un extremum lorsque le coefficient de charge va s'annuler et que le moment fléchissant présentera un extremum lorsque l'effort tranchant va s'annuler.

Ce raisonnement a été fait sur une partie de la poutre où ne s'appliquent ni charge ni couple concentré. Dans le cas contraire, il est évident que l'effort tranchant ou le moment fléchissant présentent une discontinuité.

Exemples :

- Poutre sur appuis simples avec charge concentrée



Tout d'abord, les équations d'équilibre donnent les réactions :

$$R_G = - \frac{Pb}{l} \quad \text{et} \quad R_D = - \frac{Pa}{l}$$

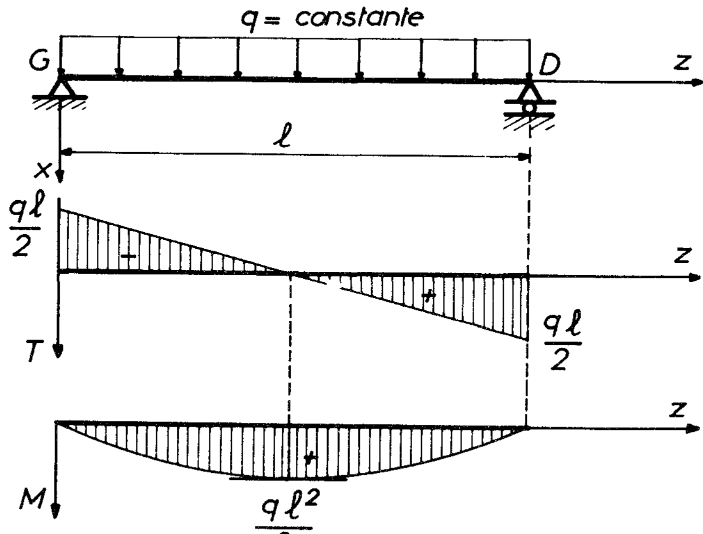
Les diagrammes T et M peuvent alors être tracés à vue ou déterminés par intégration des équations (69) et (70) comme suit :

z	0 — a	a — 1
q	0	0
T	C_1	C_2
M	$- C_1 z + C_3$	$- C_2 z + C_4$

La détermination des constantes se fait par les valeurs particulières de M et T aux limites des zones d'intégration. Ici, on a :

$$C_1 = R_G \; ; \; C_2 = - R_D \; ; \; C_3 = 0 \text{ et } C_4 = -R_D l$$

- <u>Poutre sur appuis simples avec charge uniformément répartie</u>



Les équations d'équilibre nous donnent les réactions :

$R_G = - \frac{ql}{2}$ $\qquad R_D = - \frac{ql}{2}$

Par intégration de q, on a T et M :

z	0 $\qquad\qquad\qquad$ l
q	q
T	$qz + C_1 = q(z - \frac{l}{2})$
M	$- q (\frac{z^2}{2} - \frac{lz}{2}) + C_2$

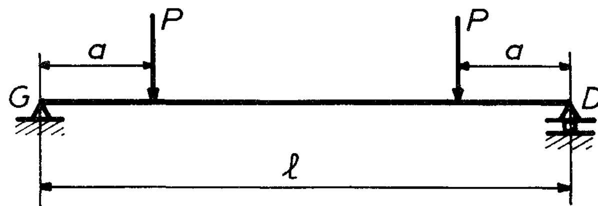
avec $C_2 = 0$ puisque M = 0 pour z = 0 ou z = l.

Remarquons que M est maximum pour T = 0, soit $z = \frac{l}{2}$.

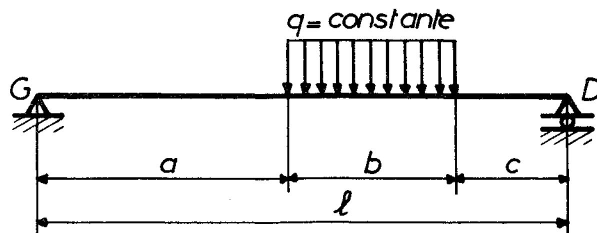
<u>Exercices</u> :

Tracer et coter les diagrammes des efforts tranchants et moments fléchissants pour les cas suivants :

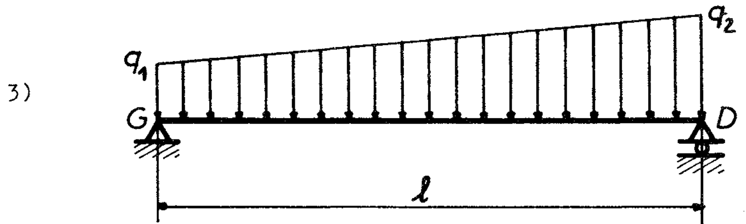
1)



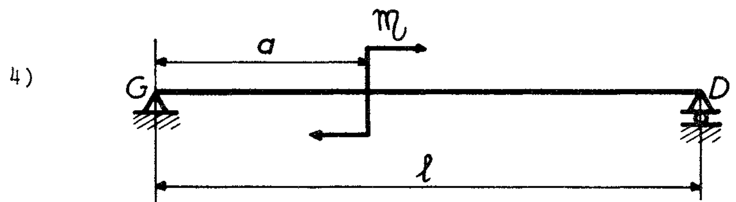
2)



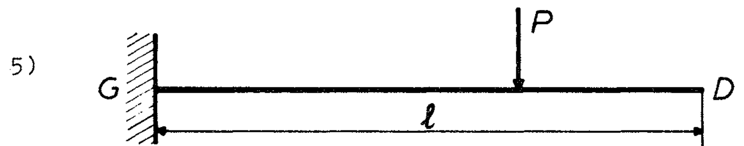
3)



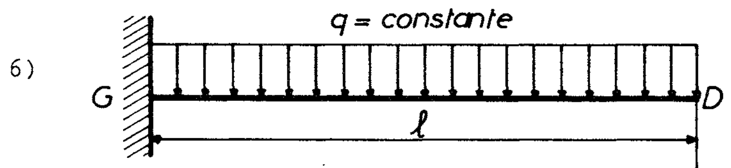
4)



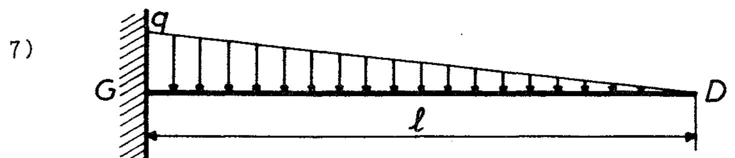
5)



6)



7)

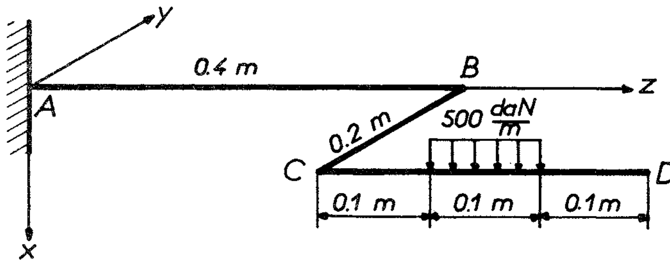


2) Poutres continues ou poutres courbes

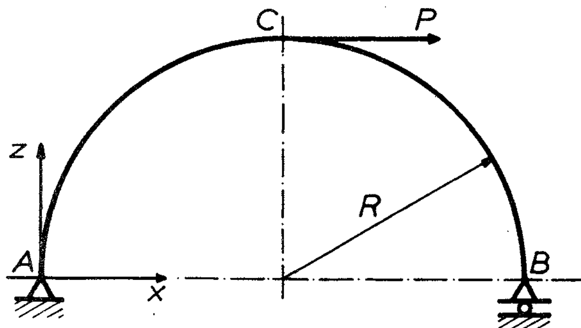
Les relations 69 et 70 ne sont plus valables. Nous ne donnerons pas de méthodes générales et les diagrammes seront tracés en regardant, sur chacune des parties de la poutre, l'évolution du torseur de gauche, sans oublier l'existence possible de l'effort longitudinal et du moment de torsion.

Exercices : Tracer les diagrammes fondamentaux dans les cas suivants :

1)



2)



2.1.6. - Etude des contraintes

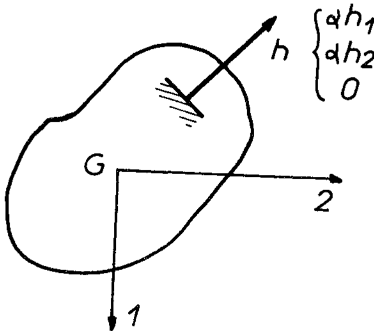
Hypothèse de Saint-Venant : l'axe 3 étant l'axe longitudinal de la poutre, on néglige les composantes σ_{11}, σ_{12} et σ_{22}.

Donc, il suffit, pour déterminer la matrice des contraintes, de déterminer le vecteur σ_3, c'est-à-dire les contraintes dans une section droite. Cette matrice a donc la forme :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad (71)$$

Conséquences

1) Contrainte sur une facette longitudinale

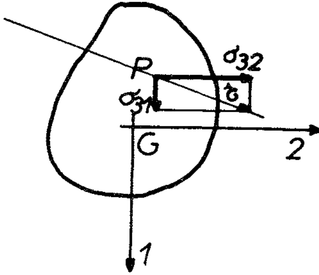


Pour une facette parallèle à l'axe 3, le vecteur a comme composantes :

$$[X_h] = [\sigma][\alpha_h] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{31}\alpha h_1 + \sigma_{32}\,\alpha h_2 \end{bmatrix} \qquad (72)$$

Donc sur une facette longitudinale, il ne peut exister qu'une contrainte tangentielle parallèle à 3. C'est la cission longitudinale.

2) Eléments principaux

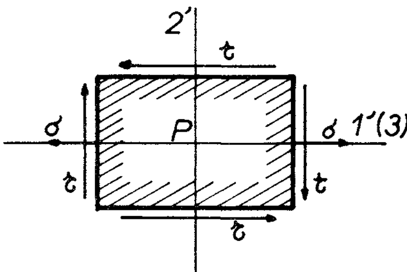


En un point P d'une poutre, nous avons :

- une contrainte normale $\sigma = \sigma_{33}$
- une contrainte tangentielle τ résultante de σ_{31} et σ_{32}

En ce point, la direction de la section droite, normale à τ, est donc direction principale X_3 et la contrainte principale correspondante σ_3 est nulle.

Autrement dit, la facette parallèle au plan (σ,τ) est exempte de contraintes ; on est toujours dans un état de contrainte plane.



Dans le plan (σ, τ), noté ici (1',2'), les contraintes sont :

$$\begin{cases} \sigma_{1'1'} = \sigma \\ \sigma_{2'2'} = 0 \\ \sigma_{1'2'} = \tau \end{cases}$$

Les formules générales des contraintes principales (voir 1ère partie) nous donnent alors :

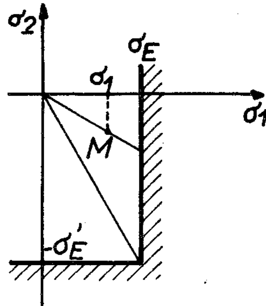
$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_\varphi = \dfrac{\sigma}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_2 = \sigma_{\varphi'} = \dfrac{\sigma}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \end{cases} \qquad (73)$$

Notons que l'on a toujours :

$$\sigma_1 \geq 0, \ \sigma_2 \leq 0 \ \text{et} \ \sigma_3 = 0$$

3) Critères de résistance : Le point représentatif est dans le quatrième quadrant.

Critère de Rankine :



La condition de résistance va s'écrire :

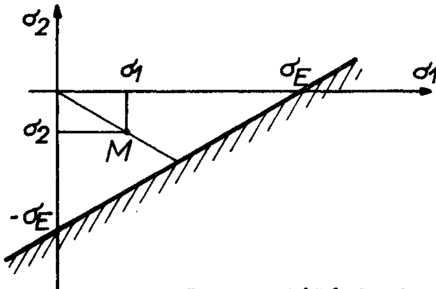
Si $\frac{|\sigma_2|}{\sigma_1} \leqslant \frac{\sigma_{E'}}{\sigma_E}$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant \sigma_E \qquad (74)$$

Si $\frac{|\sigma_2|}{\sigma_1} \geqslant \frac{\sigma_{E'}}{\sigma_E}$

$$|\sigma_2| = \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right| \leqslant \sigma_{E'} \qquad (75)$$

Critère de Tresca :



La condition de résistance est :

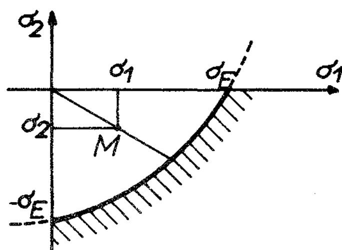
$\sigma_1 - \sigma_2 \leqslant \sigma_E$

soit :

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant \sigma_E \qquad (76)$$

La quantité du 1er membre s'appelle la contrainte équivalente de Tresca, dans le cas particulier des poutres.

Critère de Von Mises



La condition de résistance est :

$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \leq \sigma_E^2$

En remplaçant σ_1 et σ_2 par leurs valeurs (73), on obtient :

$$\sigma^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_E^2$$

ou :

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_E \qquad (77)$$

Le premier membre est la contrainte équivalente de Von Mises.

Critère de Stassi

La contrainte équivalente de Stassi s'écrit, dans le cas des poutres (voir 1ère partie) :

$$\sigma_{equ} = \frac{1}{\rho}\left[(\rho - 1)\frac{\sigma}{2} + \sqrt{(\rho + 1)^2 \frac{\sigma^2}{4} + 3\rho\tau^2}\right] \qquad (78)$$

où

$$\rho = \frac{\sigma'_E}{\sigma_E}$$

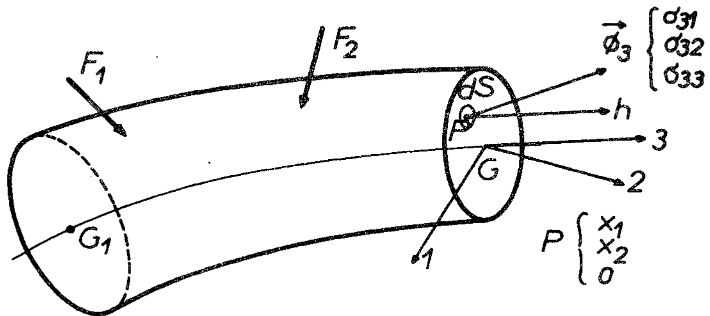
La condition de résistance est par définition :

$$\sigma_{equ} \leq \sigma_E$$

Rappelons que dans le cas où $\rho = 1$, nous retrouvons le critère de Von Mises.

2.1.7. - Equations d'équilibre

Nous allons écrire que, pour une section droite quelconque, le torseur formé par le torseur de gauche, plus les efforts dues aux contraintes de la section droite, est un torseur nul.



- Résultante nulle

$$\left\{\begin{array}{ll} T_1 + \int_S \sigma_{31}\, dS = 0 & (79) \\ T_2 + \int_S \sigma_{32}\, dS = 0 & (80) \\ N + \int_S \sigma_{33}\, dS = 0 & (81) \end{array}\right.$$

- Moment résultant nul

Vectoriellement, on a en G :

$$\overrightarrow{C_G} + \int_S \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Phi_3}\, dS = 0$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{ll} M_1 + \int_S x_2\, \sigma_{33}\, dS = 0 & (82) \\ M_2 - \int_S x_1\, \sigma_{33}\, dS = 0 & (83) \\ M_t + \int_S (x_1\, \sigma_{32} - x_2\, \sigma_{31})\, dS = 0 & (84) \end{array}\right.$$

Ces équations ne sont pas suffisantes pour déterminer les contraintes car on ne connaît pas leurs variations dans S.

2.1.8. - Etude de la déformation

Hypothèse de Bernouilli : Les sections droites restent planes au cours de la déformation. La déformation de la section dans son plan est négligeable.

La deuxième partie de cette hypothèse revient à considérer que le coefficient de Poisson est nul.

1) Déplacement d'ensemble d'une poutre (Formules de Bresse)

Nous allons calculer le déplacement de G_2 en fonction de celui de G_1 et de la déformation de la poutre G_1G_2.

- Effet du déplacement de G_1 :

Si la section G_1 subit une translation $\overrightarrow{\Delta G_1}$ et une rotation $\overrightarrow{\theta_1}$, la section G_2 va se déplacer d'une translation $\overrightarrow{\Delta G_2}$ et d'une rotation $\overrightarrow{\theta_2}$ telles que : (la poutre étant supposée indéformable) :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Delta G_2} = \overrightarrow{\Delta G_1} + \overrightarrow{\theta_1} \wedge \overrightarrow{G_1 G_2} \\ \overrightarrow{\theta_2} = \overrightarrow{\theta_1} \end{cases} \qquad (85)$$

- Effet de la déformation de la poutre $\widehat{G_1G_2}$:

En un point G quelconque de G_1G_2, nous allons noter $\vec{\lambda}$ la translation par unité de longueur et $\vec{\theta}$ la rotation autour de G par unité de longueur, dues à la déformation de la poutre.

Donc la déformation d'un élément ds de la poutre va donner à la section G_2 un déplacement :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Delta G_2} = \vec{\lambda} ds + \vec{\theta} ds \wedge \overrightarrow{GG_2} \\ \overrightarrow{\theta_2} = \vec{\theta} ds \end{cases} \qquad (86)$$

Pour avoir le déplacement de G_2 dû à la déformation de la poutre $\widehat{G_1G_2}$, il suffit d'intégrer ces expressions :

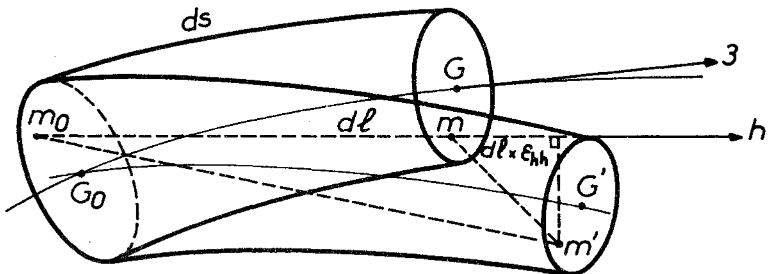
$$\begin{cases} \overrightarrow{\Delta G_2} = \displaystyle\int_{\widehat{G_1G_2}} \vec{\lambda}\, ds + \int_{\widehat{G_1G_2}} \vec{\theta}\, ds \wedge \overrightarrow{GG_2} \\ \vec{\theta}_2 = \displaystyle\int_{\widehat{G_1G_2}} \vec{\theta}\, ds \end{cases} \qquad (87)$$

En ajoutant (85) et (87), nous aurons le déplacement total de G_2 :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Delta G_2} = \overrightarrow{\Delta G_1} + \vec{\theta}_1 \wedge \overrightarrow{G_1G_2} + \displaystyle\int_{\widehat{G_1G_2}} \vec{\lambda}\, ds + \int_{\widehat{G_1G_2}} \vec{\theta}\, ds \wedge \overrightarrow{GG_2} \\ \overrightarrow{\theta_2} = \vec{\theta}_1 + \displaystyle\int_{\widehat{G_1G_2}} \vec{\theta}\, ds \end{cases} \qquad (88)$$

Ce sont les formules de Bresse.

2) Déformation pure



Considérons un élément ds de la poutre, limité par deux section G_o et G. Après déformation, la section G vient en G'. Pour passer de G à G', nous avons :

- une translation $\vec{\lambda}\, ds \begin{vmatrix} \lambda_1 ds \\ \lambda_2 ds \\ \lambda_2 ds \end{vmatrix}$

- une rotation $\vec{\theta}ds \begin{vmatrix} \theta_1 ds \\ \theta_2 ds \\ \theta_3 ds \end{vmatrix}$ autour de G.

Donc un point m de la section G, de coordonnées x_1 et x_2, va venir en m' tel que :

$$\overrightarrow{mm'} = \vec{\lambda}ds + \vec{\theta}ds \wedge \overrightarrow{Gm}$$

soit $\overrightarrow{mm'} \begin{vmatrix} \lambda_1 ds - x_2 \theta_3 ds \\ \lambda_2 ds + x_1 \theta_3 ds \\ \lambda_3 ds + (x_2 \theta_1 - x_1 \theta_2) ds \end{vmatrix}$

Considérons maintenant une direction $\vec{h}$ en m. $\vec{h}$ coupe la section droite G_0 en m_0. Appelons dl la longueur m_0m. Nous pouvons calculer l'allongement de cet élément dl :

$$dl\ \varepsilon_{hh} = \overrightarrow{mm'}.\vec{h}$$
$$= (\lambda_1 - x_2\theta_3)ds\alpha h_1 + (\lambda_2 + x_1\theta_3)ds\alpha h_2 + (\lambda_3 + x_2\theta_1 - x_1\theta_2)ds\alpha h_3$$

d'où l'on tire, puisque $\frac{ds}{dl} = \alpha h_3$:

$$\varepsilon_{hh} = (\lambda_1 - x_2\theta_3)\alpha h_1 \alpha h_3 + (\lambda_2 + x_1\theta_3)\alpha h_2 \alpha h_3 + (\lambda_3 + x_2\theta_1 - x_1\theta_2)\alpha h_3^2$$

En comparant avec la formule générale (voir 1ère partie) :

$$\varepsilon_{hh} = \varepsilon_{11}\alpha h_1^2 + \ldots + 2\varepsilon_{12}\alpha h_1 \alpha h_2 + \ldots$$

on en déduit les composantes de la déformation pure :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = 0 \\ \varepsilon_{22} = 0 \\ \varepsilon_{33} = \lambda_3 + \theta_1 x_2 - \theta_2 x_1 \\ 2\varepsilon_{12} = 0 \\ 2\varepsilon_{23} = \lambda_2 + x_1\theta_3 \\ 2\varepsilon_{31} = \lambda_1 - x_2\theta_3 \end{cases} \qquad (89)$$

2.1.9. - Formules générales

1) Contraintes

Des formules (89), nous pouvons passer aux contraintes, compte tenu de l'hypothèse de Bernouilli ($\nu = 0$) :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 0 \\ \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{33} = E\,(\lambda_3 + \theta_1 x_2 - \theta_2 x_1) \\ \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{23} = G\,(\lambda_2 + x_1\theta_3) \\ \sigma_{31} = G\,(\lambda_1 - x_2\theta_3) \end{cases} \qquad (90)$$

Nous pouvons remarquer que l'hypothèse de Bernouilli sur les déformations implique celle de Saint-Venant sur les contraintes.

2) Equations d'équilibre

Nous pouvons reprendre les équations d'équilibre (79) à (84) et les expliciter en fonction des 6 inconnues λ_1, λ_2, λ_3 et θ_1, θ_2, θ_3 qui seront les inconnues du problème.

$$\begin{cases} T_1 + \int_S G\,(\lambda_1 - x_2\,\theta_3)\,dS = 0 & (91) \\ T_2 + \int_S G(\lambda_2 + x_1\theta_3)\,dS = 0 & (92) \\ N + \int_S E(\lambda_3 + x_2\theta_1 - x_1\,\theta_2)\,dS = 0 & (93) \\ M_1 + \int_S Ex_2\,(\lambda_3 + x_2\,\theta_1 - x_1\,\theta_2)dS = 0 & (94) \\ M_2 - \int_S Ex_1\,(\lambda_3 + x_2\,\theta_1 - x_1\,\theta_2)dS = 0 & (95) \\ M_t + \int_S G\left[x_1(\lambda_2 + x_1\theta_3) - x_2(\lambda_1 - x_2\theta_3)\right]dS = 0 & (96) \end{cases}$$

Les équations (93), (94), et (95) vont permettre de calculer θ_1, θ_2, et λ_3 d'où nous allons tirer σ_{33}.

Donc nous pouvons dire tout de suite :

$$\sigma_{33} = f\ (N,\ M_1,\ M_2) \qquad (97)$$

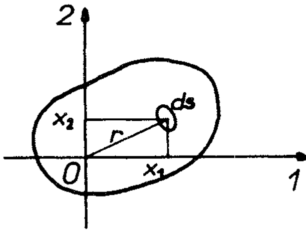
De même les équations (91), (92), et (96) vont donner λ_1, λ_2 et θ_3. D'où les contraintes tangentielles :

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{31}\\ \sigma_{32}\end{matrix}\right\} = g\ (T_1,\ T_2,\ M_t) \qquad (98)$$

2.2. - CALCUL DES CONTRAINTES NORMALES

2.2.1. - Rappel sur les inerties de surface

1) Définitions et notations



Par définition, le moment d'inertie d'une surface S par rapport à l'axe 1 est :

$$I_{11} = \int_S x_2^{\ 2}\ dS \qquad (99)$$

et par rapport à l'axe 2 :

$$I_{22} = \int_S x_1^{\ 2}\ dS \qquad (100)$$

Le produit d'inertie par rapport aux axes (1, 2) est :

$$I_{12} = \int_S x_1\ x_2\ dS \qquad (101)$$

Le moment d'inertie polaire par rapport au point O est :

$$I_o = \int_S r^2\ dS = \int_S (x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2})\ dS \qquad (102)$$

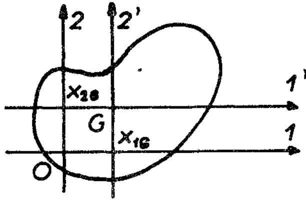
Remarques : a) on a la relation :

$$I_o = I_{11} + I_{22} \qquad (103)$$

b) si 1 ou 2 est axe de symétrie de S, on a :

$$I_{12} = 0$$

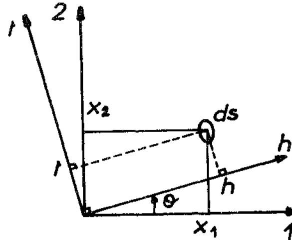
2) Transport des inerties (théorème de Huyghens)



Si 1' et 2' sont les axes parallèles à 1 et 2 et passent par le centre de gravité de S, on a les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} I_{11} = I_{1'1'} + Sx_{2G}^2 \\ I_{22} = I_{2'2'} + Sx_{1G}^2 \\ I_{12} = I_{1'2'} + Sx_{1G}\,x_{2G} \end{array}\right. \qquad (104)$$

3) Rotation des axes



Soient h et t les axes déduits de 1,2 par une rotation θ. On a :

$$\left\{\begin{array}{l} h = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta \\ t = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \end{array}\right. \qquad (105)$$

d'où on tire :

$$I_{hh} = \int_S (-x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)^2 \, dS$$

$$= I_{11} \cos^2\theta + I_{22} \sin^2\theta - 2I_{12} \sin\theta \cos\theta$$

ou encore :

$$I_{hh} = \frac{I_{11}+I_{22}}{2} + \frac{I_{11}-I_{22}}{2} \cos 2\theta - I_{12} \sin 2\theta \qquad (106)$$

De même :

$$I_{ht} = \int_S (x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)(-x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta) dS$$

$$= I_{11} \sin\theta \cos\theta - I_{22} \sin\theta \cos\theta + I_{12} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

ou encore :

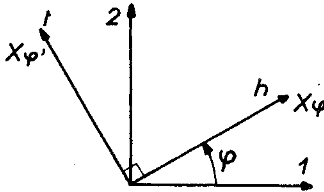
$$- I_{ht} = - \frac{I_{11} - I_{22}}{2} \sin 2\theta - I_{12} \cos 2\theta \qquad (107)$$

Nous pouvons remarquer que, du point de vue formel, il y a analogie avec les contraintes ou les déformations :

$$\begin{cases} \sigma_{hh} \longleftrightarrow \varepsilon_{hh} \longleftrightarrow I_{hh} \\ \sigma_{ht} \longleftrightarrow \varepsilon_{ht} \longleftrightarrow -I_{ht} \end{cases}$$

Donc nous pouvons reprendre les formules utilisées dans la recherche des éléments principaux des contraintes ou des déformations et les appliquer aux inerties.

4) Eléments principaux (centraux)



Par analogie avec les contraintes, il existe 2 directions perpendiculaires telles que le produit d'inertie correspondant soit nul. Ce sont les directions principales d'inertie ou axes principaux d'inertie X_φ et $X_{\varphi'}$ ou X_1 et X_2.
Les moment d'inertie correspondants sont les moments principaux d'inertie I_φ et $I_{\varphi'}$ ou I_{X_1} et I_{X_2}. Si les axes ont leur origine au centre de gravité de la surface, ces éléments principaux sont dit centraux.

La recherche des éléments principaux se fait comme pour les contraintes :

- Méthode algébrique : les directions principales sont données par :

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{-2I_{12}}{I_{11} - I_{22}} \qquad (108)$$

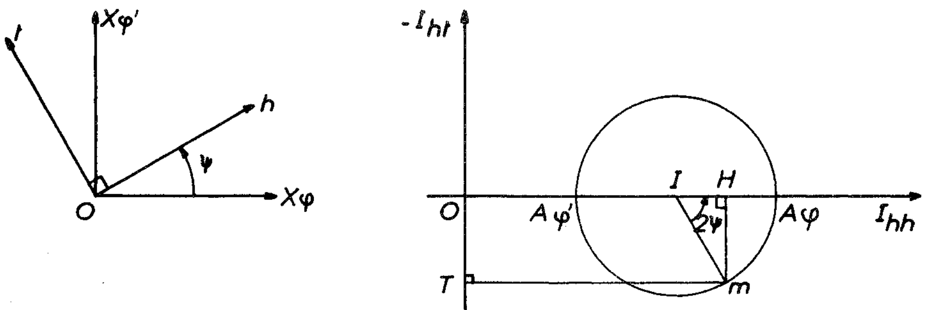
L'angle φ correspondant au moment d'inertie maximum est tel que $\cos 2\varphi$ soit du signe de $I_{11} - I_{22}$.

Les moments principaux d'inertie sont :

$$\begin{cases} I_{\varphi} = \dfrac{I_{11} + I_{22}}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{(I_{11} - I_{22})^2 + 4\, I_{12}^{\ 2}} \\ I_{\varphi'} = \dfrac{I_{11} + I_{22}}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(I_{11} - I_{22})^2 + 4\, I_{12}^{\ 2}} \end{cases} \qquad (109)$$

- Méthode graphique : (cercle de Mohr)

Problème 1 : On connait X_φ, $X_{\varphi'}$, I_φ et $I_{\varphi'}$



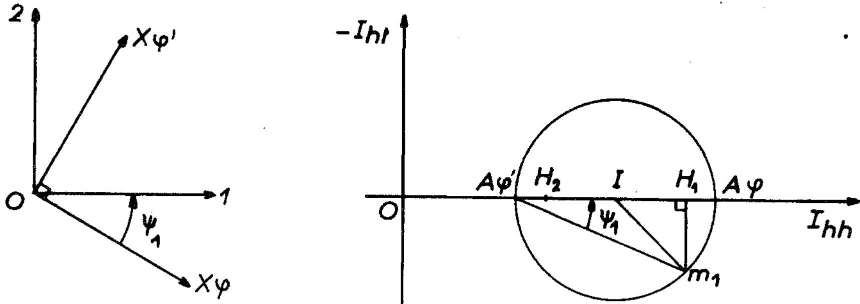
On peut construire le cercle de Mohr des inerties en portant :

$$\begin{cases} OA_\varphi = I_\varphi \\ OA_{\varphi'} = I_{\varphi'} \end{cases}$$

On en déduit, pour une direction h quelconque :

$$\begin{cases} I_{hh} = \overline{OH} \\ I_{ht} = -\overline{OT} \end{cases}$$

Problème 2 : on connaît I_{11}, I_{22}, I_{12}.



On peut tracer le cercle de Mohr en portant :

$$\begin{cases} \overline{OH_1} = I_{11} \\ \overline{OH_2} = I_{22} \end{cases}$$

d'où le centre I, milieu de H_1 H_2.

Puis on obtient le point m_1 en portant :

$\overline{H_1 m_1} = -I_{12}$.

On peut alors tracer le cercle ; on en déduit les moments principaux d'inertie :

$I\varphi = \overline{OA\varphi}$

$I\varphi' = \overline{OA\varphi'}$

ainsi que les axes principaux par l'angle ψ_1.

Remarques :

a) La quantité $I_{11}I_{22} - I_{12}^2$ est invariante dans une rotation des axes autour de O et vaut donc $I_{X_1} I_{X_2}$.

En effet, la puissance de O par rapport au cercle de Mohr est :

$$d^2 - R^2 = \left(\frac{I_{11} + I_{22}}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}{}^2\right]$$
$$= I_{11}\, I_{22} - I_{12}{}^2$$

et c'est un invariant.

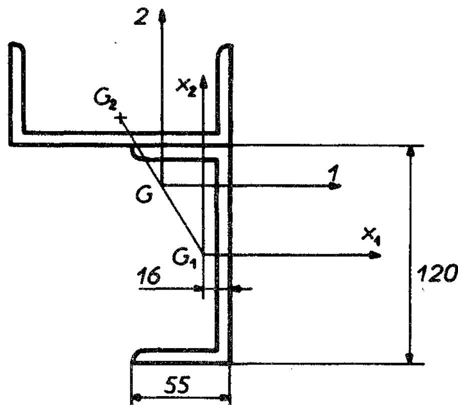
b) Un axe de symétrie de la surface est toujours axe principal d'inertie.

5) Exercice :

On considère le profil de la figure suivante, formé par deux UPN 120 x 55.

On donne pour un profil UPN 120 x 55 :

$$\begin{cases} I_{x_1} = 364 \text{ cm}^4 \\ I_{x_2} = 43,2 \text{ cm}^4 \\ S = 17 \text{ cm}^2 \end{cases}$$



En déduire : 1) Le centre de gravité G

2) I_{11}, I_{22} et I_{12}

3) Les éléments principaux centraux.

2.2.2. - Formules générales

1) Calcul de λ_3, θ_1 et θ_2

Reprenons les formules (93), (94) et (95) :

$$\begin{cases} N + \int_S E(\lambda_3 + x_2\,\theta_1 - x_1\,\theta_2)\,dS = 0 \\ M_1 + \int_S Ex_2\,(\lambda_3 + x_2\theta_1 - x_1\,\theta_2)\,dS = 0 \\ M_2 - \int_S Ex_1\,(\lambda_3 + x_2\theta_1 - x_1\,\theta_2)\,dS = 0 \end{cases}$$

La première équation s'intègre :

$$N + E\lambda_3\int_S dS + E\,\theta_1\int_S x_2\,dS - E\,\theta_2\int_S x_1\,dS = 0$$

Les 2 dernières intégrales sont des moments statiques par rapport à des axes passant par le centre de gravité ; elles sont nulles.

D'où :

$$\lambda_3 = \frac{-N}{ES} \qquad (110)$$

La deuxième équation donne :

$$M_1 + E\lambda_3\int_S x_2 dS + E\theta_1\int_S x_2^2\,dS - E\,\theta_2\int_S x_1x_2\,dS = 0$$

La première intégrale est nulle, la deuxième est I_{11}, la troisième est I_{12}. D'où :

$$M_1 + E\,\theta_1\,I_{11} - E\,\theta_2\,I_{12} = 0 \qquad (111)$$

De même, la troisième équation donne :

$$M_2 - E\lambda_3\int_S x_1 dS - E\theta_1\int_S x_1x_2 dS + E\theta_2\int_S x_1^2 dS = 0$$

soit :

$$M_2 - E\,\theta_1\,I_{12} + E\,\theta_2\,I_{22} = 0 \qquad (112)$$

En résolvant en θ_1 et θ_2, on obtient finalement :

$$\left\{\begin{aligned} E\theta_1 &= -\frac{M_1 I_{22} + M_2 I_{12}}{I_{11}I_{22} - I_{12}^2} \\ E\theta_2 &= -\frac{M_2 I_{11} + M_1 I_{12}}{I_{11}I_{22} - I_{12}^2} \end{aligned}\right. \qquad (113)$$

2) Calcul de la contrainte normale

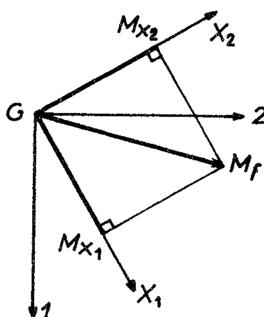
Nous avons vu (90) que :

$$\sigma_{33} = E(\lambda_3 + \theta_1 x_2 - \theta_2 x_1)$$

d'où, avec les valeurs trouvées précédemment, :

$$\sigma_{33} = -\frac{N}{S} - \frac{M_1 I_{22} + M_2 I_{12}}{I_{11}I_{22} - I_{12}^2}\, x_2 + \frac{M_2 I_{11} + M_1 I_{12}}{I_{11}I_{22} - I_{12}^2}\, x_1 \qquad (114)$$

Cas particulier =



Si on se place dans les axes principaux d'inertie, les formules précédentes se simplifient :

$$E\theta_{X_1} = -\frac{M_{X_1}}{I_{X_1}} \qquad (115)$$

$$E\theta_{X_2} = -\frac{M_{X_2}}{I_{X_2}} \qquad (116)$$

$$\sigma_{33} = -\frac{N}{S} - \frac{M_{X_1}}{I_{X_1}}\, X_2 + \frac{M_{X_2}}{I_{X_2}}\, X_1 \qquad (117)$$

2.2.3. - Traction pure (ou compression pure)

Si la poutre supporte un effort longitudinal seul, c'est-à-dire si $N \neq 0$, $M_1 = M_2 = 0$, la formule (114) donne :

$$\sigma_{33} = -\frac{N}{S} \qquad (118)$$

L'allongement correspondant est :

$$\varepsilon_{33} = \lambda_3 = -\frac{N}{ES} \qquad (119)$$

2.2.4. - Flexion pure

1) Formules de base

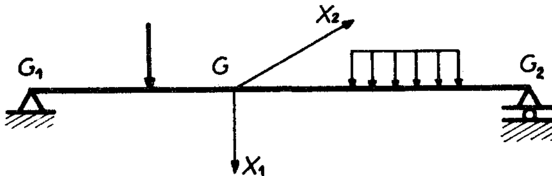
Plaçons nous dans le cas où $N = 0$ et $M_1, M_2 \neq 0$
Dans deux axes (1,2) quelconques, la contrainte normale due à la flexion s'écrit (formule 114) :

$$\sigma_{33} = -\frac{M_1 I_{22} + M_2 I_{12}}{I_{11} I_{22} - I_{12}^2} x_2 + \frac{M_2 I_{11} + M_1 I_{12}}{I_{11} I_{22} - I_{12}^2} x_1 \qquad (120)$$

ou, si les axes (1,2) sont les axes principaux d'inertie (X_1, X_2) de la section :

$$\sigma_{33} = -\frac{M_{X_1}}{I_{X_1}} X_2 + \frac{M_{X_2}}{I_{X_2}} X_1 \qquad (121)$$

Cas particulier : Poutre plane chargée dans son plan



Supposons que l'axe X_1 situé dans le plan de la poutre et du chargement est axe principal d'inertie.

Seul M_{X_2} existe et la contrainte s'écrit :

$$\sigma_{33} = \frac{M_{X_2}}{I_{X_2}} X_1 \qquad (122)$$

C'est la formule couramment rencontrée dans les formulaires de résistance des matériaux.

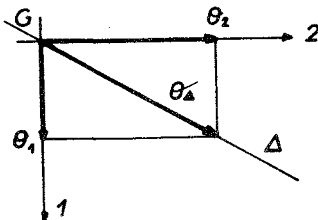
La rotation par unité de longueur est :

$$\theta_{X_2} = - \frac{M_{X_2}}{E\ I_{X_2}} \qquad (123)$$

L'axe de flexion est l'axe portant la rotation $\vec{\theta}$. Ici, seule la composante sur X_2 existe. L'axe X_2 est donc l'axe de flexion. Nous pouvons remarquer que sur cet axe, $\sigma_{33} = 0$.

D'autre part, l'axe de flexion est confondu avec l'axe portant le moment fléchissant ; la flexion est dite principale.

2) Position de l'axe de flexion Δ dans le cas général



L'équation de l'axe de flexion est :

$$x_2 = \frac{\theta_2}{\theta_1} x_1 \qquad (124)$$

soit :

$$x_2 \theta_1 - x_1 \theta_2 = 0$$

Equation qui correspond également à :

$$\sigma_{33} = 0 \qquad (125)$$

Mais dans le cas général, cet axe de flexion n'est pas confondu avec le moment fléchissant ; on a de la flexion déviée.

En fonction des composantes du moment fléchissant, l'équation (124) s'écrit :

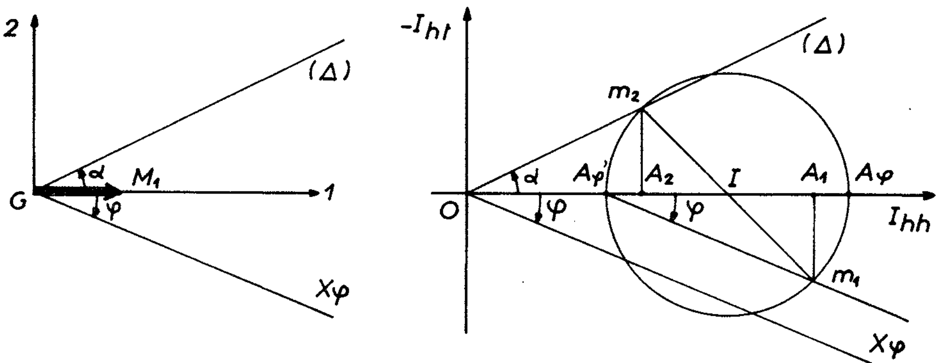
$$x_2 = \frac{M_2 I_{11} + M_1 I_{12}}{M_1 I_{22} + M_2 I_{12}} \; x_1 \qquad (126)$$

<u>Cas particulier</u> :

Si le moment fléchissant est porté par l'axe 1, alors $M_2 = 0$ et l'axe de flexion (Δ) a pour équation :

$$x_2 = \frac{I_{12}}{I_{22}} \; x_1 \qquad (127)$$

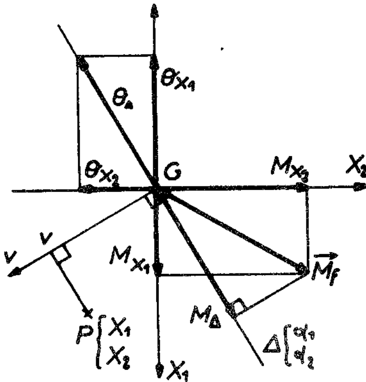
Nous pouvons déterminer graphiquement cet axe de flexion à l'aide du cercle de Mohr des inerties.



En effet, si nous joignons l'origine 0 au point m_2, caractéristique de la direction 2, nous avons, dans les axes servant à la construction de Mohr, une droite de pente I_{12}/I_{22} ; c'est donc l'axe de flexion, en faisant coïncider l'axe 1 avec l'axe portant I_{hh}.

3) <u>Formules de la flexion pure rapportées à l'axe de flexion</u>

Raisonnons dans les axes principaux.



On a, si on appelle α_1 et α_2 les cosinus directeurs de Δ :

$$I_\Delta = I_{X_1}\,\alpha_1^2 + I_{X_2}\,\alpha_2^2 \qquad (128)$$

D'autre part, on peut écrire :

$$\begin{cases}\theta_{X_1} = \theta_\Delta \cdot \alpha_1\\ \theta_{X_2} = \theta_\Delta \cdot \alpha_2\end{cases}$$

Donc on a successivement, compte tenu de (115) et (116) :

$$\theta_\Delta = \frac{\theta_{X_1}}{\alpha_1} = \frac{\theta_{X_2}}{\alpha_2} = -\frac{M_{X_1}}{EI_{X_1}\,\alpha_1} = -\frac{M_{X_2}}{EI_{X_2}\,\alpha_2}$$

$$= -\frac{M_{X_1}\,\alpha_1 + M_{X_2}\,\alpha_2}{E(I_{X_1}\alpha_1^2 + I_{X_2}\,\alpha_2^2)} \qquad (129)$$

Orientons l'axe $\vec{\Delta}$ dans un sens quelconque et appelons M_Δ la projection de $\vec{M_f}$ sur $\vec{\Delta}$. (129) s'écrit encore :

$$\theta_\Delta = -\frac{\vec{M_f}\cdot\vec{\Delta}}{E\,I_\Delta}$$

soit :

$$\boxed{\theta_\Delta = -\frac{M_\Delta}{E\,I_\Delta}} \qquad (130)$$

La contrainte en un point P quelconque s'écrit :

$$\sigma_{33} = E\,(X_2\,\theta_{X_1} - X_1\,\theta_{X_2})$$

$$= E\,\theta_\Delta\,(X_2\,\alpha_1 - X_1\,\alpha_2) \qquad (131)$$

Notons $\vec{v}$ l'axe faisant l'angle $-\frac{\Pi}{2}$ avec $\vec{\Delta}$.
$\vec{v}$ a donc comme cosinus directeurs $(\alpha_2, -\alpha_1)$ et (131) s'écrit :

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= E\,\theta_\Delta\,(-\,\overrightarrow{GP}.\vec{v})\\ &= -\,E\theta_\Delta\;v\end{aligned} \qquad (132)$$

où v est la projection de $\overrightarrow{GP}$ sur $\vec{v}$.

Compte-tenu de (130), la contrainte s'écrit encore :

$$\boxed{\sigma_{33} = \frac{M_\Delta}{I_\Delta}\,v} \qquad (133)$$

4) Exercice :

Pour le profil en double étudié en (2.2.1), on suppose que le moment fléchissant est porté par l'axe 1.

1) Déterminer algébriquement et graphiquement l'axe de flexion Δ .

2) Calculer algébriquement et graphiquement I_Δ .

3) Calculer le moment fléchissant maximum que peut supporter ce profil, la résistance pratique du matériau étant de 14 hbar.

2.3. - CALCUL DES CONTRAINTES TANGENTIELLES

2.3.1. - Formules générales

Reprenons les équations d'équilibre (91), (92) et (96).

$$\begin{cases} T_1 + \int_S G\,(\lambda_1 - x_2\,\theta_3)\,dS = 0 \\ T_2 + \int_S G\,(\lambda_2 + x_1\,\theta_3)\,dS = 0 \\ M_t + \int_S G\left[x_1\,(\lambda_2 + x_1\theta_3) - x_2(\lambda_1 - x_2\,\theta_3)\right] dS = 0 \end{cases}$$

L'intégration de la première nous donne :

$$T_1 + G\lambda_1 \int_S dS - G\theta_3 \int_S x_2\,dS = 0$$

Soit, puisque la 2e intégrale est nulle :

$$\lambda_1 = - \frac{T_1}{GS} \qquad (134)$$

De la même façon, la 2e équation donne :

$$\lambda_2 = - \frac{T_2}{GS} \qquad (135)$$

Enfin, la 3e équation s'écrit :

$$M_t + G\lambda_2 \int_S x_1 dS - G\lambda_1 \int_S x_2 dS + G\theta_3 \int_S (x_1^2 + x_2^2) dS = 0$$

Les deux premières intégrales sont nulles, la 3e est le moment d'inertie polaire I_G. Donc :

$$\theta_3 = - \frac{M_t}{GI_G} \qquad (136)$$

d'où les contraintes tangentielles d'après (90) :

$$\begin{cases} \sigma_{31} = - \dfrac{T_1}{S} + \dfrac{M_t}{I_G} x_2 \\ \sigma_{32} = - \dfrac{T_2}{S} - \dfrac{Mt}{I_G} x_1 \end{cases} \qquad (137)$$

2.3.2. - Flexion simple

1) Analyse des conditions aux limites

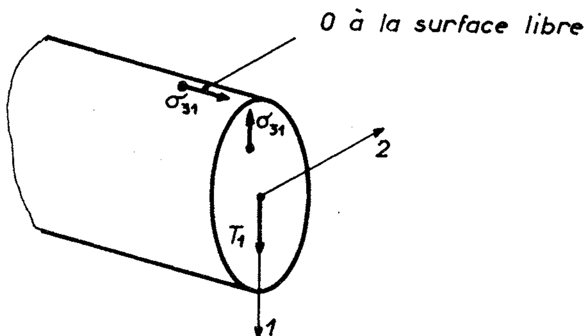
La sollicitation de flexion simple est la sollicitation couramment rencontrée dans les poutres, où les moments fléchissants sont accompagnés d'efforts tranchants.

Nous avons vu comment calculer les contraintes dues aux moments fléchissants. Les contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant sont, d'après (137) :

$$\begin{cases} \sigma_{31} = - \dfrac{T_1}{S} \\ \sigma_{32} = - \dfrac{T_2}{S} \end{cases} \qquad (138)$$

Les contraintes tangentielles sont donc constantes dans toute la section de la poutre. En fait, cet état de contraintes ne peut exister dans une poutre dont la surface est libre et ces formules ne donnent qu'une valeur moyenne de la contrainte tangentielle dans la section.

En effet, plaçons-nous, par exemple, dans le cas d'une poutre à section circulaire, soumise à un effort tranchant T_1. (138) donne une contrainte tangentielle $\sigma_{31} = -T_1/S$ constante dans la section, donc en particulier à la partie supérieure (ou inférieure) de la section. Or par réciprocité des contraintes tangentielles, cette contrainte ne peut exister si la surface est libre. De façon plus générale , on ne peut avoir de composante de la contrainte tangentielle, normale au contour. La contrainte tangentielle totale doit être tangente au contour.

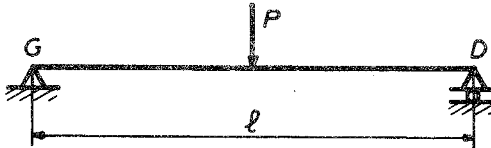


Les formules (138) ne donnent donc qu'une valeur moyenne de cette contrainte ; ceci est dû au fait que les hypothèses faites dans la théorie des poutres sont trop restrictives. En particulier, une section droite ne doit pas rester plane mais va présenter un léger gauchissement.

En fait, pour une poutre dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transversales, ces contraintes tangentielles sont toujours négligeables par rapport aux contraintes normales de flexion.

Exercice :

Soit une poutre droite sur appuis simples, chargée en son milieu.



La section est rectangulaire, de hauteur h, de largeur b.

1) Tracer les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant.

2) Calculer les contraintes normales et tangentielles maximum.

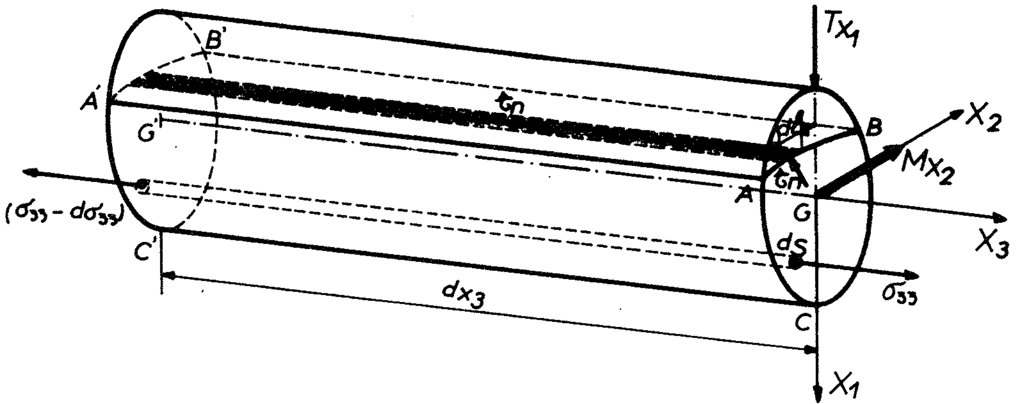
3) Montrer que la contrainte tangentielle est négligeable devant la contrainte normale.

2) Formule de la cission longitudinale :

Nous pouvons donner une théorie plus exacte basée sur la formule de la cission longitudinale.

A cet effet, considérons un petit élément de poutre, soumis à un effort tranchant T_{X_1}, suivant l'axe principal d'inertie X_1 et donc à un moment fléchissant M_{X_2}.

Faisons une coupe longitudinale de cet élément, suivant une ligne AB de la section droite et équilibrons l'une des parties, par exemple ABCA'B'C'.



Ecrivons l'équation de projection des efforts sur

X_3 :

$$\int_{ABC} d\,\sigma_{33}\, dS + \int_{\widehat{AB}} \tau_n\, dX_3\, dl = 0 \qquad (139)$$

or :

$$\sigma_{33} = \frac{M_{X_2}}{I_{X_2}} X_1$$

d'oû

$$d\,\sigma_{33} = \frac{dM_{X_2}}{I_{X_2}} X_1$$

donc (139) s'écrit encore :

$$\int_{ABC} \frac{dM_{X_2}}{I_{X_2}} X_1\, dS + \int_{\widehat{AB}} \tau_n dX_3\, dl = 0 \qquad (140)$$

Or, d'après (70) :

$$T_{X_1} = - \frac{dM_{X_2}}{dX_3}$$

Donc (140) s'écrit :

$$- \frac{T_{X_1}}{I_{X_2}} \int_{ABC} X_1 \, dS + \int_{\widehat{AB}} \tau_n \, dl = 0 \qquad (141)$$

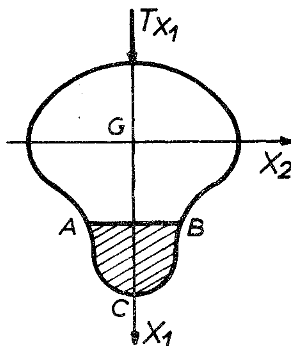
La première intégrale représente le moment statique de ABC par rapport à X_2.

La deuxième peut être remplacée par le produit de la valeur moyenne de τ_n sur la coupure par la longueur de la coupure. D'où l'on tire finalement :

$$(\tau_n)_{moyen} = \frac{T_{X_1} \cdot M_{st/X_2}(ABC)}{I_{X_2} \cdot l_{AB}} \qquad (142)$$

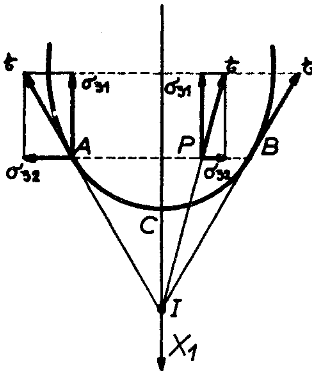
Formule de la cission longitudinale

3) Application au calcul des contraintes tangentielles dans une section épaisse à axe de symétrie



Supposons que la section supporte un effort tranchant T_{X_1}, X_1 étant l'axe de symétrie.
On obtient une bonne répartition des contraintes tangentielles par les opérations suivantes :
a) la coupure AB sera droite et parallèle à X_2 ;
b) la contrainte σ_{31} sera égale à $- \tau_n$ et sera constante sur AB.
Rappelons que sa valeur est donc :

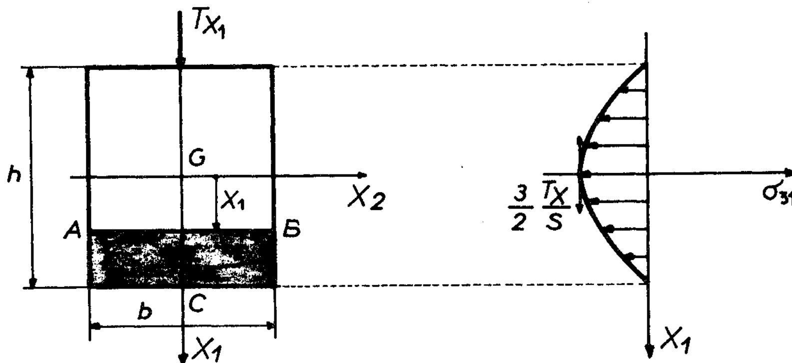
$$\sigma_{31} = - \frac{T_{X_1} \cdot M_{st/X_2}(ABC)}{I_{X_2} \cdot l_{AB}} \qquad (143)$$



c) On connait σ_{32} en A et B pour que les conditions aux limites soient vérifiées; c'est-à-dire que la résultante τ doit être dirigée suivant la tangente au contour.

Soit I le point de concours des tangentes en A et B avec X_1. On va admettre que pour un point P quelconque de AB, la résultante τ passe également par I, ce qui, connaissant σ_{31}, permet de déterminer σ_{32}.

Exemple : Section rectangulaire



On a successivement :

$$I_{X_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{Sh^2}{12}$$

$$l_{AB} = b$$

$$M_{St/X_2}(ABC) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - X_1^2\right)$$

d'où l'on tire d'après (143) :

$$\sigma_{31} = - \frac{3}{2} \frac{T_{X_1}}{S} \left(1 - \frac{4X_1^2}{h^2}\right) \qquad (144)$$

Donc σ_{31} varie de façon parabolique et prend un maximum au centre de la section, qui vaut :

$$\frac{3}{2} \frac{T_{X_1}}{S}$$

Les conditions aux limites sont vérifiées par la composante σ_{31} seule. Donc $\sigma_{32} = 0$ en tout point de la section.

<u>Exercice</u> : Montrer que pour une section circulaire soumise à un effort tranchant T_{X_1}, les contraintes tangentielles ont les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{31} = - \frac{4}{3} \frac{T_{X_1}}{S} \left(1 - \frac{X_1^2}{R^2}\right) & (145) \\ \sigma_{32} = \frac{4}{3} \frac{T_{X_1}}{S} \frac{X_1 X_2}{R^2} & (146) \end{array} \right.$$

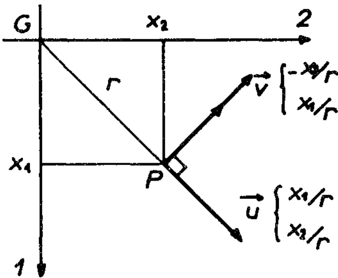
2.3.3. - Torsion pure

Plaçons-nous dans le cas où $M_t \neq 0$, les autres composantes du torseur de gauche étant nulles.

Les formules générales (136) et (137) nous donnent :

$$\theta_3 = - \frac{M_t}{GI_G} \qquad (147)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{31} = \frac{M_t}{I_G} x_2 \\ \sigma_{32} = - \frac{M_t}{I_G} x_1 \end{array} \right. \qquad (148)$$



Pour un point P quelconque, de coordonnées (x_1, x_2), considérons l'axe $\vec{u}$ issu de G et dirigé vers P ainsi que l'axe $\vec{v}$ passant par P et faisant $+ \frac{\Pi}{2}$ avec $\vec{u}$.
Si la longueur de GP est notée r, les cosinus directeurs de $\vec{u}$ sont $\frac{x_1}{r}$ et $\frac{x_2}{r}$ tandis que ceux de $\vec{v}$ sont : $-\frac{x_2}{r}$ et $\frac{x_1}{r}$

Si on fait le produit scalaire de $\vec{\tau}$ par $\vec{u}$, on obtient :

$$\vec{\tau} \cdot \vec{u} = \frac{M_t}{I_G} x_2 \cdot \frac{x_1}{r} - \frac{M_t}{I_G} x_1 \cdot \frac{x_2}{r} = 0$$

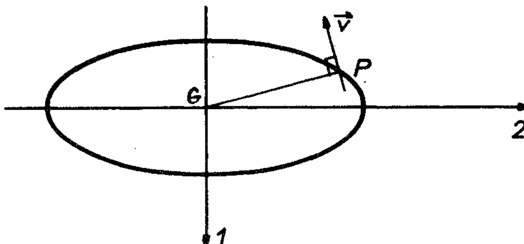
Donc $\vec{\tau}$ est porté par $\vec{v}$. Sa valeur algébrique sur $\vec{v}$ est alors :

$$\tau = \vec{\tau} \cdot \vec{v} = - \frac{M_t}{I_G} \left(\frac{x_2^2 + x_1^2}{r}\right)$$

soit encore :

$$\boxed{\tau = - \frac{M_t}{I_G} r} \qquad (149)$$

Analyse des conditions aux limites :



Nous venons de voir que la contrainte tangentielle est portée par la normale $\vec{v}$ au rayon GP. Or, pour que les conditions aux limites soient vérifiées, il faut que la contrainte tangentielle soit tangente au contour, ce qui ne sera en général pas réalisé, sauf pour le contour circulaire. Là encore, l'hypothèse de planéïté des sections droites est cause de cette restriction. Nous avons d'ailleurs vu, dans le premier chapitre comment ou pouvait, en théorie de l'élasticité, introduire une fonction de gauchissement pour étudier des profils autres que circulaires.

2.4. - CALCUL DES DEPLACEMENTS

A : METHODE CINEMATIQUE

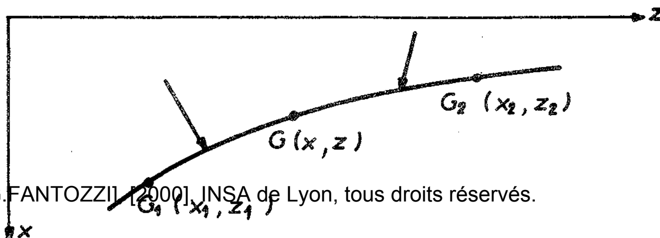
2.4.1. - Formules de Bresse

La méthode cinématique utilise les formules de Bresse (88). Le déplacement d'une section G_2 s'écrit, en fonction de celui d'une autre section G_1 et de la déformation de la poutre G_1G_2 :

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{\Delta G_2} = \overrightarrow{\Delta G_1} + \overrightarrow{\theta_1}\wedge\overrightarrow{G_1G_2} + \int_{\widehat{G_1G_2}} \vec{\lambda}\, ds + \int_{\widehat{G_1G_2}} \vec{\theta}\, ds\wedge\overrightarrow{GG_2} \\ \overrightarrow{\theta_2} = \overrightarrow{\theta_1} + \int_{\widehat{G_1G_2}} \vec{\theta}\, ds \end{array}\right.$$

Nous allons appliquer ces formules dans différents cas particuliers en faisant également des hypothèses simplificatrices.

1) Poutre plane chargée dans son plan



<u>Hypothèses</u> : - la poutre est dans le plan xz et Gy est axe principal d'inertie ;
- le chargement est dans le plan xz ;
- on ne tiendra compte que de l'effet du moment fléchissant.

Si on néglige les déplacements dus à l'effort longitudinal et à l'effort tranchant, on a $\vec{\lambda} = 0$ et les formules de Bresse s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{\Delta G_2} = \overrightarrow{\Delta G_1} + \overrightarrow{\theta_1} \wedge \overrightarrow{G_1G_2} + \int_{\widehat{G_1G_2}} \vec{\theta}\, ds \wedge \overrightarrow{GG_2} \\ \overrightarrow{\theta_2} = \overrightarrow{\theta_1} + \int_{\widehat{G_1G_2}} \vec{\theta}\, ds \end{array}\right. \qquad (150)$$

Or, sur les axes x,y,z, les composantes de ces vecteurs sont :

$$\overrightarrow{\Delta G_1} \begin{vmatrix} u_1 \\ 0 \\ w_1 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{\Delta G_2} \begin{vmatrix} u_2 \\ 0 \\ w_2 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{G_1G_2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 \\ 0 \\ z_2 - z_1 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{GG_2} \begin{vmatrix} x_2 - x \\ 0 \\ z_2 - z \end{vmatrix}$$

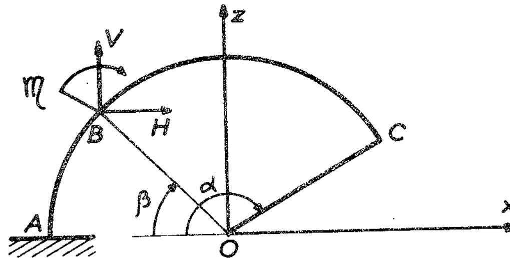
$$\overrightarrow{\theta_1} \begin{vmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{\theta_2} \begin{vmatrix} 0 \\ \theta_2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{\theta} \begin{vmatrix} 0 \\ -\dfrac{M_y}{EI_y} = -\dfrac{M}{EI} \\ 0 \end{vmatrix}$$

d'où en développant les formules vectorielles (150) :

$$\left\{\begin{array}{l} u_2 = u_1 + \theta_1 (z_2 - z_1) - \int_{\widehat{G_1G_2}} \dfrac{M}{EI} (z_2 - z)\, ds \\ w_2 = w_1 - \theta_1 (x_2 - x_1) + \int_{\widehat{G_1G_2}} \dfrac{M}{EI} (x_2 - x)\, ds \\ \theta_2 = \theta_1 - \int_{\widehat{G_1G_2}} \dfrac{M}{EI}\, ds \end{array}\right.$$

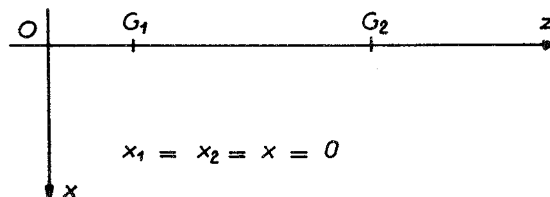
Ces formules permettent le calcul du déplacement d'une section G_2 en fonction de celui de G_1 et du torseur de gauche sur G_1G_2. Ce calcul sera particulièrement simple si la section G_1 est encastrée. Sinon, il faudra faire intervenir les conditions imposées par les liaisons.

<u>Exercice</u> : On considère la poutre AC, de ligne moyenne circulaire de rayon R, encastrée en A et chargée en B, conformément à la figure suivante :



Déterminer en fonction de α, β, H, V et 𝔐 les déplacements u_c et w_c du point C suivant x et z, ainsi que la rotation θ_c. On appellera E, le module d'élasticité du matériau et I le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe de flexion.

2) Cas particulier des poutres droites



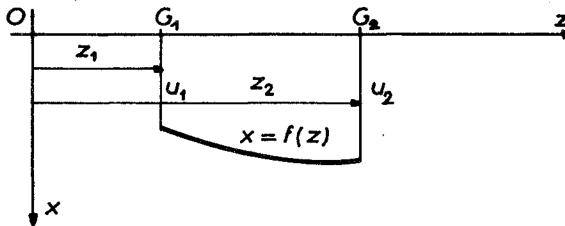
Si on choisit l'axe z confondu avec la ligne moyenne de la poutre, les formules de Bresse (151) se simplifient :

$$\left\{\begin{array}{l} u_2 = u_1 + \theta_1 (z_2 - z_1) - \int_{z_1}^{z_2} \frac{M}{EI} (z_2 - z)\, dz \\ w_2 = w_1 \\ \theta_2 = \theta_1 - \int_{z_1}^{z_2} \frac{M}{EI}\, dz \end{array}\right. \qquad (152)$$

Le cas des poutres droites étant fréquemment rencontré, nous allons en faire une étude plus approfondie.

2.4.2. - Poutres droites

1) Equation différentielle de la déformée



Considérons la première des équations de Bresse (152). Elle est valable quelle que soit la section G_2 ; u_2 peut-être considéré comme une fonction de z_2 ; si on la dérive par rapport à z_2, on obtient :

$$\frac{du_2}{dz_2} = \theta_1 - \int_{z_1}^{z_2} \frac{M}{EI}\, dz \qquad (153)$$

En dérivant une deuxième fois, on obtient :

$$\frac{d^2u_2}{dz_2^{\,2}} = - \frac{M\,(z_2)}{EI(z_2)} \qquad (154)$$

Cette équation différentielle de la déformée est valable quel que soit l'abscisse z_2 ; on peut donc supprimer l'indice et l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2u}{dz^2} = - \frac{M}{EI} \qquad (155)$$

ou, si $x = f(z)$ est l'équation de la déformée :

$$\boxed{x'' = - \frac{M}{EI}} \qquad (156)$$

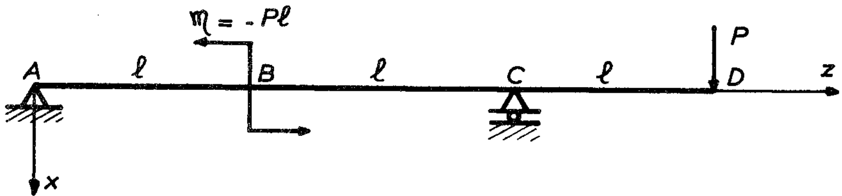
Remarquons aussi que $x' = \theta$ est la rotation de la section d'abcisse z.

2) Détermination de la déformée

Pour obtenir l'équation de la déformée, on peut intégrer deux fois l'équation (156). Cette intégration pourra se faire dans chaque zone de la poutre où le moment fléchissant aura une expression analytique déterminée. Dans chaque zone, nous allons donc introduire deux constantes d'intégration ; ces constantes seront ensuite déterminées en exprimant qu'il y a continuité de flèche et de rotation entre les zones ; les deux constantes restantes seront déterminées par les conditions imposées par les liaisons.

Exercice :

Déterminer la déformée de la poutre droite suivante ; son module est E et son inertie constante I.



Donner en particulier les flèches et les rotations en A, B, C et D.

B : METHODE ENERGETIQUE

2.4.3. - Energie emmagasinée dans une poutre

1) Rappels

L'énergie emmagasinée dans un corps, par unité de volume est, d'après la première partie du cours :

$$W = \frac{1}{2E}(\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2+\sigma_{33}^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11})+\frac{1}{2G}(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2)$$

En théorie des poutres, cette expression devient :

$$W = \frac{\sigma_{33}^2}{2E} + \frac{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2}{2G}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G} \qquad (157)$$

avec :

$$\sigma_{33} = -\frac{N}{S} + \frac{M_{X_2}}{I_{X_2}}X_1 - \frac{M_{X_1}}{I_{X_1}}X_2$$

$$\sigma_{31} = -\frac{T_{X_1}}{S} + \frac{M_t}{I_G}X_2$$

$$\sigma_{32} = -\frac{T_{X_2}}{S} - \frac{M_t}{I_G}X_1$$

2) Expression de l'énergie emmagasinée par unité de longueur de la poutre

Par intégration de (157), nous avons :

$$W = \int_S \left(\frac{\sigma_{33}^2}{2E} + \frac{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2}{2G}\right) dS \qquad (158)$$

Pour simplifier le calcul, nous pouvons séparer cette énergie en deux : l'énergie due à la contrainte normale $W(\sigma_{33})$ et l'énergie due à la contrainte tangentielle $W(\sigma_{31},\sigma_{32})$.

$$2EW(\sigma_{33}) = \int_S \sigma_{33}^2\, dS$$

$$= \int_S \frac{N^2}{S^2}dS + \int_S \frac{M_{X_2}^2}{I_{X_2}^2}X_1^2\,dS + \int_S \frac{M_{X_1}^2}{I_{X_2}^2}X_2^2\,dS$$

$$- 2\int_S \frac{N}{S}\cdot\frac{M_{X_2}}{I_{X_2}}X_1\,dS + 2\int_S \frac{N}{S}\cdot\frac{M_{X_1}}{I_{X_1}}X_2\,dS - 2\int_S \frac{M_{X_2}}{I_{X_2}}\frac{M_{X_1}}{I_{X_1}}X_1X_2\,dS$$

Les trois dernières intégrales sont nulles. Donc, après l'intégration des trois premières :

$$2EW\,(\sigma_{33}) = \frac{N^2}{S} + \frac{M_{X_2}^{\;2}}{I_{X_2}} + \frac{M_{X_1}^{\;2}}{I_{X_1}} \qquad (159)$$

De la même façon :

$$2GW\,(\sigma_{31},\sigma_{32}) = \int_S (\sigma_{31}^{\;2} + \sigma_{32}^{\;2})\, dS$$

$$= \int_S \frac{T_{X_1}^{\;2}}{S^2}\, dS + \int_S \frac{T_{X_2}^{\;2}}{S^2} dS + \int_S \frac{M_t^{\;2}}{I_G^{\;2}} (X_1^{\;2} + X_2^{\;2}) dS$$

$$- 2 \int_S \frac{T_{X_1}}{S} \cdot \frac{M_t}{I_G}\, x_2\, dS + 2 \int_S \frac{T_{X_2}}{S} \cdot \frac{M_t}{I_G}\, x_1\, dS$$

ou encore :

$$2GW\,(\sigma_{31}, \sigma_{32}) = \frac{T_{X_1}^{\;2}}{S} + \frac{T_{X_2}^{\;2}}{S} + \frac{M_t^{\;2}}{I_G} \qquad (160)$$

Remarque 1 : on a vu, qu'en réalité, les contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant n'étaient pas uniformément réparties ; de même, pour un profil non circulaire, la rigidité de torsion est GI'_G au lieu de GI_G. On peut alors corriger la formule précédente :

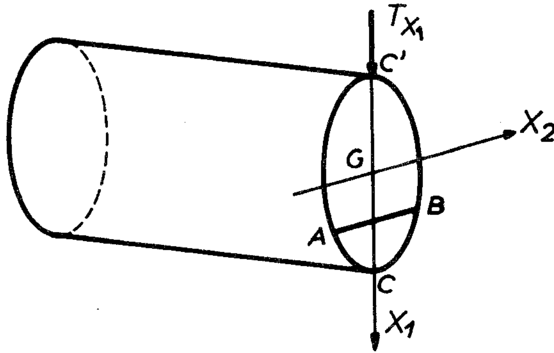
$$2GW\,(\sigma_{31},\sigma_{32}) = k_1\, \frac{T_{X_1}^{\;2}}{S} + k_2\, \frac{T_{X_2}^{\;2}}{S} + \frac{M_t^{\;2}}{I'_G} \qquad (161)$$

Remarque 2 : Calcul de k_1 ou k_2

Faisons le calcul dans le cas d'une section épaisse à axe de symétrie X_1, soumise à un effort tranchant T_{X_1}.

D'après le paragraphe 2.3.2., la contrainte tangentielle σ_{31} est constante le long d'une ligne parallèle à X_2 et vaut :

$$\sigma_{31} = - \frac{T_{X_1} \cdot M_{S_t/X_2}\,(ABC)}{I_{X_2} \cdot l_{AB}}$$



L'énergie emmagasinée due à σ_{31} est alors :

$$W(\sigma_{31}) = \int_S \frac{\sigma_{31}^2}{2G}\, dS$$

Or, nous pouvons prendre comme élément de surface :
$dS = l_{AB}\, dX_1$

donc :

$$W(\sigma_{31}) = \frac{T_{X_1}^2}{2G\, I_{X_2}^2} \int_{c'}^{c} \frac{M_{St/X_2}^2(ABC)}{l_{AB}}\, dX_1 \qquad (162)$$

expression que nous pouvons écrire sous la forme suivante, par analogie avec les formules (159) et (160) :

$$W(\sigma_{31}) = \frac{T_{X_1}^2}{2G\,\Sigma} \qquad (163)$$

où Σ est la <u>section réduite</u> définie par :

$$\Sigma = \frac{I_{X_2}^2}{\displaystyle\int_{c'}^{c} \frac{M_{St/X_2}^2(ABC)}{l_{AB}}\, dX_1}$$

A noter que cette formule ne fait intervenir que les caractéristiques géométriques de la section.

Le coefficient de correction k_1 est alors, en négligeant l'effet d'une éventuelle contrainte σ_{32} :

$$k_1 = \frac{S}{\Sigma} \qquad (165)$$

<u>Exercice</u> :

Montrer que la section réduite d'une section rectangulaire est :

$$\Sigma = \frac{5}{6} S$$

Montrer que la section réduite d'une section circulaire est :

$$\Sigma = \frac{9}{10} S$$

3) <u>Formule générale de l'énergie</u>

D'après les formules (159) et (160), l'énergie totale emmagasinée par unité de longueur est :

$$W_{\text{unité de longueur}} = \frac{N^2}{2ES} + \frac{{M_{X_1}}^2}{2EI_{X_1}} + \frac{{M_{X_2}}^2}{2EI_{X_2}} + \frac{{T_{X_1}}^2}{2GS} + \frac{{T_{X_2}}^2}{2GS} + \frac{{M_t}^2}{2GI_G} \qquad (166)$$

Nous pouvons écrire cette formule sous la forme générale :

$$W_{\text{Unité de longueur}} = \Sigma \frac{M^2}{2R} \qquad (167)$$

où la somme est à faire sur toutes les composantes M du torseur de gauche, R étant la rigidité du profil pour la composante M considérée.

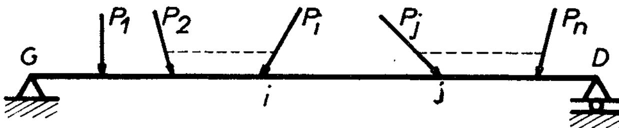
L'énergie totale emmagasinée dans une poutre $\widehat{G_1G_2}$ est alors :

$$W = \int_{\widehat{G_1G_2}} \left(\Sigma \frac{M^2}{2R} \right) ds \qquad (168)$$

Pour une structure composée de différentes poutres, l'énergie totale emmagasinée sera :

$$W = \sum_{\substack{\text{toutes}\\ \text{les poutres}}} \left[\int_{G_1G_2} \left(\Sigma \frac{M^2}{2R} \right) ds \right] \qquad (169)$$

2.4.4. - Flexibilités



Soit une poutre GD soumise à un certain nombre de charges $P_1 \ldots P_n$. Désignons par i le point d'application de la charge P_i et par D_i la projection du déplacement du point i sur le support de P_i.

Nous allons utiliser deux principes :

- Principe de superposition : le déplacement du point i est égal à la somme des déplacements du même point pour chacune des forces prises séparément, soit :

$$D_i = D_{iP_1} + D_{iP_2} + \ldots + D_{iP_j} + D_{iP_n} \qquad (170)$$

où D_{iP_j} est la projection sur P_i du déplacement de i dû à l'application de P_j.

D_i est donc indépendant de l'ordre d'application des forces.

- Principe de proportionnalité (entre forces et déplacements) : on a pour i et j quelconques :

$$D_{iP_j} = f_{ij} P_j \qquad (171)$$

où f_{ij} est un coefficient de proportionnalité.

Les déplacements des points 1 à n peuvent donc s'écrire :

$$\begin{cases} D_1 = f_{11}P_1 + f_{12}P_2 + \dots + f_{1j}P_j + \dots + f_{1n}P_n \\ \vdots \\ D_i = f_{i1}P_1 + f_{i2}P_2 + \dots + f_{ij}P_j + \dots + f_{in}P_n \\ \vdots \\ D_n = f_{n1}P_1 + f_{n2}P_2 + \dots + f_{nj}P_j + \dots + f_{nn}P_n \end{cases} \quad (172)$$

ou, sous forme matricielle :

$$[D] = [f][P] \quad (173)$$

où $[D]$ et $[P]$ sont les matrices colonnes des déplacements et des charges correspondantes.

La matrice $[f]$, de terme général f_{ij}, est la <u>matrice de flexibilité</u> de la poutre, relative aux charges $[P]$. Pour avoir la signification de f_{ij}, on peut faire toutes les charges nulles sauf $P_j = 1$; f_{ij} est alors le déplacement du point i sous l'influence d'une charge $P_j = 1$. f_{ij} est appelé <u>coefficient d'influence</u> de flexibilité.

<u>Remarques</u>

1) <u>Déplacements et charges généralisés</u>

Ce que nous venons d'écrire pour des charges concentrées est vrai pour des couples concentrés, le déplacement correspondant étant la rotation autour de l'axe du couple. Nous pouvons également généraliser le chargement à deux forces opposées ou deux couples opposés, les déplacements correspondants étant la variation de longueur entre les points d'application des deux forces ou la variation angulaire entre les deux sections d'application des couples.

En résumé, nous avons le tableau suivant :

Charges généralisées	Déplacements généralisés
i P	D i j'
i P	i D
P i j P	i l j i' l + Δl j' D = Δl
P i j P	i j i' j' Δθ D = Δθ

2) Nous avons écrit (173) :

$$[D] = [f][P]$$

Nous pouvons inverser cette formule pour avoir les efforts en fonction des déplacements :

$$[P] = [k][D] \qquad (174)$$

avec :

$$[k] = [f]^{-1}$$

$[k]$ est la <u>matrice de rigidité</u> relative aux déplacements $[D]$.

2.4.5. - Théorème de Clapeyron

Enoncé : Le travail des forces extérieures est égal à l'énergie élastique emmagasinée dans la structure.

On suppose ici que l'énergie interne est une fonction d'état, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que des efforts, non de la manière dont ils ont été appliqués. On a donc :

$$W_{ext} = W \qquad (175)$$

où W est l'énergie emmagasinée donnée par la formule (169) et W_{ext} le travail des forces extérieures que nous allons calculer maintenant :

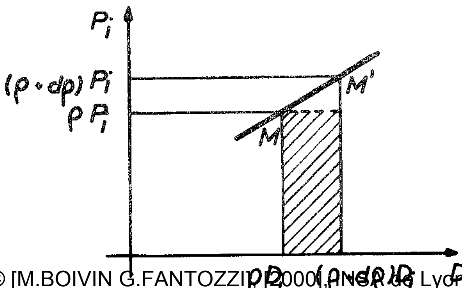
Pour cela, imaginons que le chargement soit proportionnel :

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow \rho P_1 \longrightarrow P_1 \\ 0 \longrightarrow \rho P_2 \longrightarrow P_2 \\ \vdots \\ 0 \longrightarrow \rho P_n \longrightarrow P_n \end{cases}$$

avec $0 \leq \rho \leq 1$

Les déplacements correspondants, proportionnels aux charges, vont donc être aussi proportionnels :

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow \rho D_1 \longrightarrow D_1 \\ 0 \longrightarrow \rho D_2 \longrightarrow D_2 \\ \vdots \\ 0 \longrightarrow \rho D_n \longrightarrow D_n \end{cases}$$



Lorsque ρ subit un accroissement $d\rho$, le travail de la charge P_i est $\rho P_i \times D_i \, d\rho$.

Pour l'ensemble des charges, l'accroissement de travail est donc :

$$d\,W_{ext} = (P_1D_1 + P_2D_2 + \dots + P_nD_n)\,\rho\,d\,\rho$$

d'où, par intégration :

$$W_{ext} = (P_1D_1 + P_2D_2 + \dots + P_nD_n)\int_0^1 \rho\,d\,\rho$$

soit finalement :

$$W_{ext} = \frac{1}{2}\,(P_1D_1 + P_2D_2 + \dots + P_nD_n) \qquad (176)$$

Sous forme matricielle, cette expression peut s'écrire :

$$W_{ext} = \frac{1}{2}\,\left[\tilde{P}\right]\left[D\right] = \frac{1}{2}\,\left[\tilde{D}\right]\left[P\right] \qquad (177)$$

ou encore, d'après (173) :

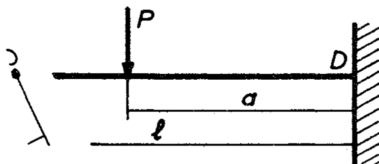
$$W_{ext} = \frac{1}{2}\left[\tilde{P}\right]\left[f\right]\left[P\right] \qquad (178)$$

C'est la forme quadratique de $[f]$ développée suivant $[P]$.

On peut se servir directement du théorème de Clapeyron, lorsque la structure est soumise à une seule charge, pour calculer le déplacement correspondant.

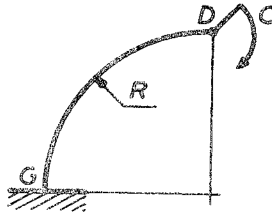
Exercices :

1) Calculer la flèche au droit de la charge P pour la poutre encastrée suivante :



On ne tiendra compte que du moment fléchissant.

2) Calculer la rotation de la section D de la poutre en 1/4 cercle suivante :



2.4.6. - Symétrie de la matrice de flexibilité

Nous allons montrer que $f_{ij} = f_{ji}$.

Pour cela, considérons la structure soumise aux deux charges P_i et P_j.

1) Calculons l'énergie emmagasinée si on applique P_i puis P_j.

Lors de l'application de P_i, on a :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} P_i D_{iPi} = \frac{1}{2} P_i \; (f_{ii} P_i)$$

Lors de l'application de P_j, on a :

$$W_{ext} = P_i \; (f_{ij} P_j) + \frac{1}{2} P_j (f_{jj} P_j)$$

Soit, au total :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} P_i (f_{ii} P_i) + \frac{1}{2} P_j (f_{jj} P_j) + P_i (f_{ij} P_j) \quad (179)$$

2) Maintenant, faisons le même calcul, mais en appliquant d'abord P_j puis P_i.

Lors de l'application de P_j, on a :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \; P_j \; (f_{jj} P_j)$$

Lors de l'application de P_i, on a :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} P_i \,(f_{ii}P_i) + P_j(f_{ji}P_i)$$

soit, au total :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} P_i(f_{ii}P_i) + \frac{1}{2} P_j(f_{jj}P_j) + P_j(f_{ji}P_i) \quad (180)$$

En égalant avec (179), on a immédiatement :

$$f_{ij} = f_{ji} \quad (181)$$

La matrice des flexibilités est donc toujours symétrique :

$$\left[f \right] = \left[\tilde{f} \right] \quad (182)$$

2.4.7. - Théorèmes de Castigliano

Le théorème de Clapeyron permet d'écrire, compte tenu de (178) :

$$W = \frac{1}{2} \left[\tilde{P}\right]\left[f\right]\left[P\right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[f_{11}P_1{}^2 + f_{22}P_2{}^2 + \ldots + 2f_{12}P_1P_2 + 2f_{13}P_1P_3 + \ldots\right]$$

C'est une fonction des n variables P_i. Faisons une dérivée partielle par rapport à P_i :

$$\frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{1}{2} \left[2\, f_{i1}P_1 + 2f_{i2}P_2 + \ldots + 2f_{ii}P_i + \ldots + 2\, f_{in}P_n\right]$$

soit :

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial P_i} = D_i} \quad (183)$$

C'est le <u>premier théorème de Castigliano</u> : la dérivée partielle de l'énergie par rapport à l'une des charges généralisées est égale au déplacement généralisé correspondant.

Si maintenant, nous dérivons une deuxième fois par rpport à P_j, nous obtenons :

$$\boxed{\frac{\partial^2 W}{\partial P_i \partial P_j} = f_{ij}} \quad (184)$$

C'est le deuxième théorème de Castigliano : la dérivée seconde de l'énergie par rapport à deux charges généralisées est égale au coefficient d'influence correspondant.

Le premier théorème de Castigliano permet de calculer le déplacement correspondant à l'une quelconque des charges appliquées. Nous allons encore généraliser cette méthode énergétique pour pouvoir calculer un déplacement quelconque en un point quelconque.

2.4.8. - Méthode de la charge unité (théorème de Maxwell-Mohr)

1) Démonstration

Pour simplifier l'écriture, nous laisserons provisoirement tomber les signes Σ dans l'expression (169) :

$$W(P_1,P_2,\ldots,P_n) = \int \frac{M^2}{2R}\, ds$$

Appliquons le premier théorème de Castigliano :

$$D_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \int \frac{M}{R} \frac{\partial M}{\partial P_i}\, ds \qquad (185)$$

Or, M est une fonction linéaire des charges $P_1,\ldots, P_n$ qu'on peut écrire sous la forme :

$$M = M\,(P_1 P_2 \ldots P_{i-1} P_{i+1} \ldots P_n) + M\,(P_i)$$

On a alors :

$$\frac{\partial M}{\partial P_i} = \frac{\partial M(P_i)}{\partial P_i} = M\,(P_i = 1) \qquad (186)$$

cette dernière expression étant la valeur prise par M pour $P_i = 1$, toutes les autres charges étant nulles.

Donc finalement (185) peut s'écrire :

$$D_i = \int \frac{M(P_1 \ldots P_n)\; M\,(P_i = 1)}{R}\, ds \qquad (187)$$

Soit encore, en remettant les sommations :

$$D_i = \sum_{barres} \left\{ \int_{G_1G_2} \left(\Sigma \frac{M(P_1 \ldots P_n)\ M(P_i = 1)}{R} \right) ds \right\} \qquad (188)$$

C'est le théorème de Maxwell-Mohr.

D'un point de vue pratique, on aura donc à déterminer les composantes du torseur de gauche pour le chargement donné, puis les composantes du torseur de gauche pour le chargement $P_i = 1$, avant d'appliquer la formule de Maxwell-Mohr (188)

2) Calcul des coefficients d'influence f_{ij}

On va dériver une deuxième fois par rapport à P_j. Comme on a également :

$$\frac{\partial M}{\partial P_j} = M\ (P_j = 1)$$

La formule (188) donne immédiatement :

$$f_{ij} = \sum_{barres} \left\{ \int_{G_1G_2} \left(\Sigma \frac{M(P_i = 1)\ M\ (P_j = 1)}{R} \right) ds \right\} \qquad (189)$$

3) Calcul du déplacement en un point i où il n'y a pas de charge

Nous pouvons toujours imaginer que P_i existe et faire $P_i = 0$ dans le résultat obtenu pour D_i.

Or $M(P_1 \ldots P_n) = M(P_1 \ldots P_{i-1} P_{i+1} \ldots P_n) + P_i M(P_i = 1)$

Donc, la formule (187) donne :

$$D_i = \int \frac{M(P_1 \ldots P_{i-1} P_{i+1} \ldots P_n) M(P_i = 1)}{R}\, ds + P_i \int \frac{M^2(P_i = 1)}{R}\, ds$$

Si on fait tendre P_i vers 0, on a finalement :

$$D_i = \int \frac{M(P_1 \ldots P_{i-1} P_{i+1} \ldots P_n)\ M\ (P_i = 1)}{R}\, ds \qquad (190)$$

Cette formule est évidemment valable en ajoutant les sommations aux différentes poutres et aux différents composantes du torseur de gauche.

Elle généralise la formule (188) pour le calcul d'un déplacement en un point où il n'y a pas de charge. On a toujours à déterminer les composantes du torseur de gauche pour le chargement donné, puis pour le chargement $P_i = 1$. Il reste alors à faire l'intégration du produit de 2 fonctions. Nous allons utiliser pour cela les intégrales de Mohr.

2.4.9. Intégrales de Mohr

Ce sont des intégrales de la forme :

$$I = \int_0^l y_1\,(z)\; y_2\,(z)\; dz \qquad (191)$$

ou

$$I' = \int_0^l y_1^2\,(z)\; dz \qquad (192)$$

Elles sont tabulées dans les quatre pages suivantes, pour des fonctions pouvant aller jusqu'au 3e degré.

Nous avons sur les premières lignes les résultats des intégrales I' pour les fonctions y_1 représentées sur les diagrammes situés à gauche des résultats. Sur les lignes suivantes, nous avons les résultats des intégrales I pour le produit des fonctions qui se trouvent, l'une à gauche du résultat, l'autre en première ligne.

Notons, qu'en l'absence de signe, les fonctions représentées sont considérées comme positives. D'autre par, les cotes des diagrammes M_i, M_k..., sont en valeurs absolues.

M_i ; L	$M_i^2 L$	M_i ; L	$\frac{1}{3} M_i^2 L$
M_k	$M_i M_k L$	M_k	$\frac{1}{3} M_i M_k L$
M_k	$\frac{1}{2} M_i M_k L$	M_k	$\frac{1}{6} M_i M_k L$
M_k	$\frac{1}{2} M_i M_k L$	M_k ; x ; x'	$\frac{1}{6} M_i M_k L \left(1 + \frac{x'}{L}\right)$
M_k ; x ; x'	$\frac{1}{2} M_i M_k L$	M_k ; $\frac{L}{2}$; $\frac{L}{2}$	$\frac{1}{4} M_i M_k L$
M_k ; $\frac{L}{2}$; $\frac{L}{2}$	$\frac{1}{2} M_i M_k L$	M'_k ; M''_k	$\frac{1}{6} M_i (2M'_k + M''_k) L$
M'_k ; M''_k	$\frac{1}{2} M_i (M'_k + M''_k) L$	M'_k ; + ; − ; M''_k	$\frac{1}{6} M_i (2M'_k - M''_k) L$
M'_k ; + ; − ; M''_k	$\frac{1}{2} M_i (M'_k - M''_k) L$	M'_k ; $\frac{L}{2}$; + ; − ; $\frac{L}{2}$; M'_k	$\frac{1}{6} M_i M_k L$
M'_k ; + ; $\frac{L}{2}$; − ; $\frac{L}{2}$; M'_k	0	M_k (1)	$\frac{1}{4} M_i M_k L$
M_k (1)	$\frac{1}{3} M_i M_k L$	M_k (1)	$\frac{1}{12} M_i M_k L$
M_k (1)	$\frac{1}{3} M_i M_k L$	M_k (1)	$\frac{1}{3} M_i M_k L$
M_k (1)	$\frac{2}{3} M_i M_k L$	M_k (1)	$\frac{1}{4} M_i M_k L$
M_k (1)	$\frac{2}{3} M_i M_k L$	M_k (1)	$\frac{5}{12} M_i M_k L$
M_k (1)	$\frac{2}{3} M_i M_k L$	INTÉGRALES de MOHR	

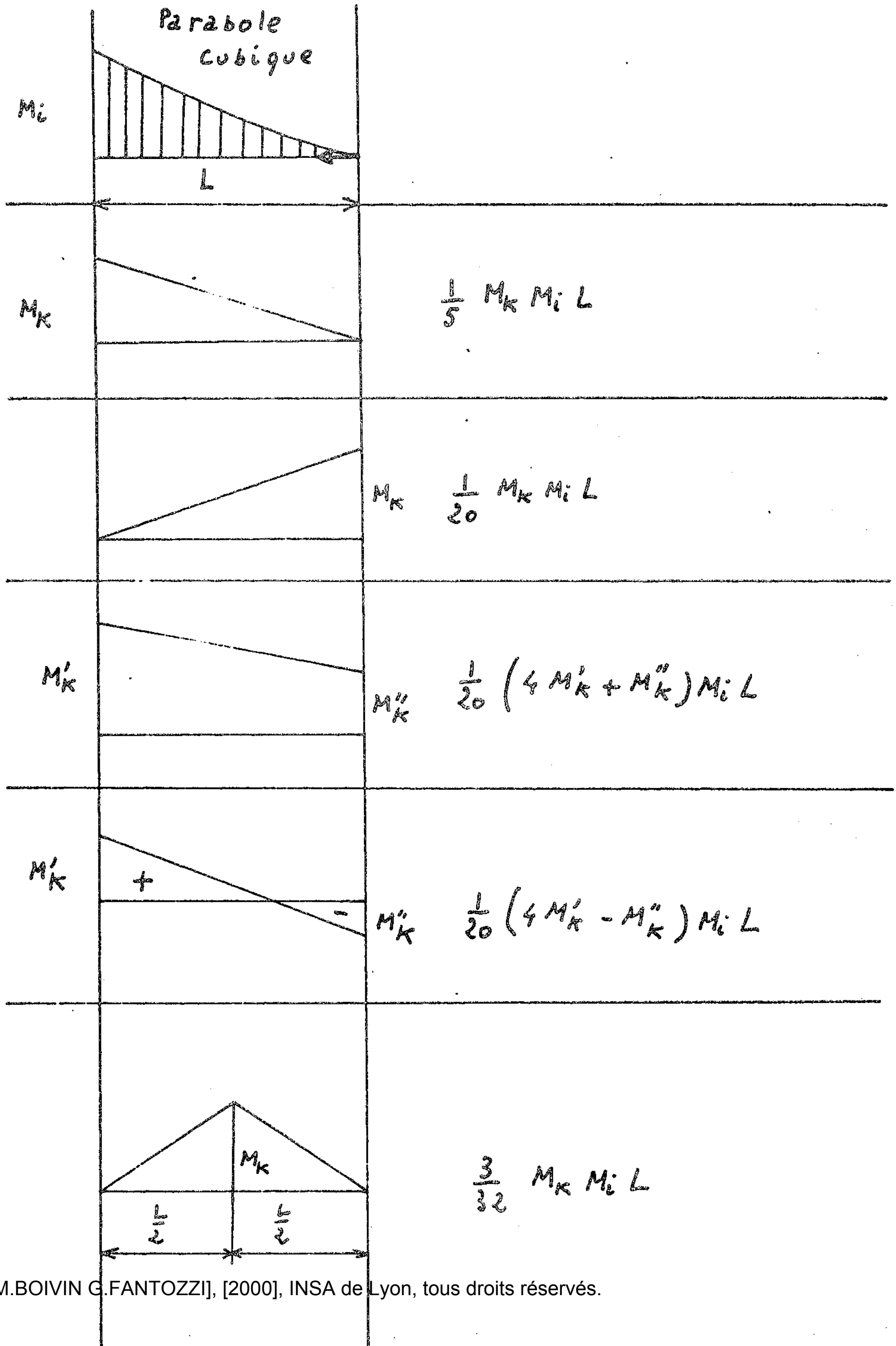
(1) Parabole

x, x'	$\frac{1}{3} M_i^2 L$	M_i, $\frac{L}{2}$, $\frac{L}{2}$	$\frac{1}{3} M_i^2 L$
x, x'	$\frac{1}{3} M_i M_k L$	M_k, $\frac{L}{2}$, $\frac{L}{2}$	$\frac{1}{3} M_i M_k L$
$\frac{L}{2}$, $\frac{L}{2}$	$\frac{M_i M_k L}{2x'}\left(\frac{L}{2} - \frac{2x^2}{3L}\right)$	M_k', M_k''	$\frac{1}{4} M_i (M_k' + M_k'') L$
$\bar{x}$, x_1, x_1'	$\frac{M_i M_k L}{6}\left(2 - \frac{\bar{x}^2}{x_1 x'}\right)$	M_k', +, −, M_k''	$\frac{1}{4} M_i (M_k' - M_k'') L$
M_k''	$\frac{1}{6} M_i \left[M_k'\left(1 + \frac{x'}{L}\right) + M_k''\left(1 + \frac{x}{L}\right)\right]$	$\frac{L}{2}$, M_k', +, −, $\frac{L}{2}$, M_k''	0
+, −, M_k''	$\frac{1}{6} M_i \left[M_k'\left(1 + \frac{x'}{L}\right) - M_k''\left(1 + \frac{x}{L}\right)\right] L$	(1) M_k	$\frac{7}{48} M_i M_k L$
$\bar{x}$, $\frac{L}{2}$, +, −, $\frac{L}{2}$, M_k'	$\frac{1}{3} M_i M_k L \frac{\bar{x}}{L}$	(1) M_k	$\frac{7}{48} M_i M_k L$
(1)	$\frac{1}{12} M_i M_k L\left(\frac{3x'}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right)$	(1) M_k	$\frac{5}{12} M_i M_k L$
(1)	$\frac{1}{12} M_i M_k L\left(\frac{3x}{L} + \frac{x'^2}{L^2}\right)$	(1) M_k	$\frac{17}{48} M_i M_k L$
(1)	$\frac{1}{3} M_i M_k L\left(1 + \frac{x x'}{L^2}\right)$	M_k	$\frac{17}{48} M_i M_k L$
(1)	$\frac{1}{12} M_i M_k L\left(3 + \frac{3x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$		
(1)	$\frac{1}{12} M_i M_k L\left(3 + \frac{3x'}{L} - \frac{x'^2}{L^2}\right)$	INTÉGRALES de MOHR	

(1) Parabole

M'_i M''_i L	$\frac{1}{3}\left(M_i'^2 + M'_i M''_i + M_i''^2\right) L$	M'_i M''_i L	$\frac{1}{3}\left(M_i'^2 - M'_i M''_i + M_i''^2\right) L$
M' M''_K	$\frac{1}{6}\left[2(M'_i M'_k + M''_i M''_k) + M''_i M'_k + M'_i M''_k\right] L$ ou	M'_K + − M''_K	$\frac{1}{6}\left[2(M'_i M'_k + M''_i M''_k) - (M''_i M'_k + M'_i M''_k)\right] L$
M'_K M''_K	$\frac{1}{6}\left[M'_i(2M'_k + M''_k) + M''_i(2M''_k + M'_k)\right] L$	M'_K $L/2$ $L/2$ M'_K	$\frac{1}{6} M'_k (M'_i + M''_i) L$
M'_K + − M''_K	$\frac{1}{6}\left[2(M'_i M'_k - M''_i M''_k) + M''_i M'_k - M'_i M''_k\right] L$	1 M_K	$\frac{1}{12} M_k (3M'_i - M''_i) L$
M'_K $L/2$ + − $L/2$ M'_K	$\frac{1}{6} M'_k (M'_i - M''_i) L$	1 M_K	$\frac{1}{12} M_k (M'_i - 3M''_i) L$
1 M_K	$\frac{1}{12} M_k (3M'_i + M''_i) L$	1 M_K	$\frac{1}{3} M_k (M'_i - M''_i) L$
1 M_K	$\frac{1}{12} M_k (M'_i + 3M''_i) L$	1 M_K	$\frac{1}{12} M_k (3M'_i - 5M''_i) L$
1 M_K	$\frac{1}{3} M_k (M'_i + M''_i) L$	1 M_K	$\frac{1}{12} M_k (5M'_i - 3M''_i) L$
1 M_K	$\frac{1}{12} M_k (3M'_i + 5M''_i) L$		
1 M_K	$\frac{1}{12} M_k (5M'_i + 3M''_i) L$	**INTÉGRALES de MOHR**	

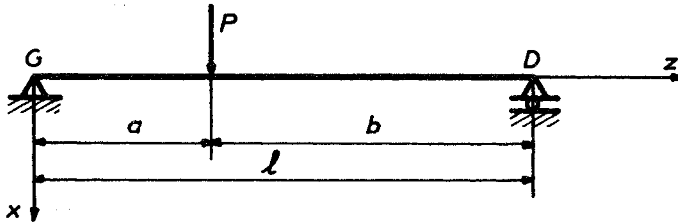
1 Paraboles



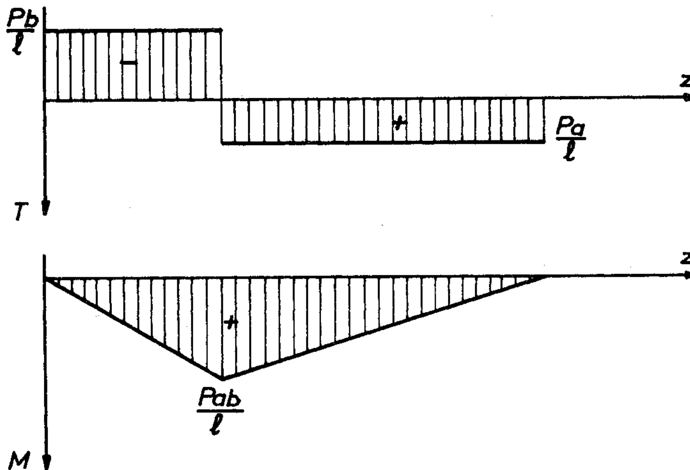
Parabole cubique
M_i
L
M_K
$\frac{1}{5} M_K M_i L$
M_K
$\frac{1}{20} M_K M_i L$
M'_K
M''_K
$\frac{1}{20}(4M'_K + M''_K) M_i L$
M'_K
+
-
M''_K
$\frac{1}{20}(4M'_K - M''_K) M_i L$
M_K
$\frac{L}{2}$
$\frac{L}{2}$
$\frac{3}{32} M_K M_i L$

2.4.10 - Exemple

Soit la poutre droite sur appuis simples GD soumise à une charge concentrée P.

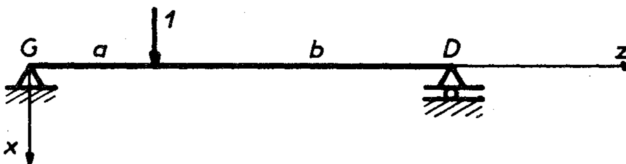


1) Diagrammes fondamentaux

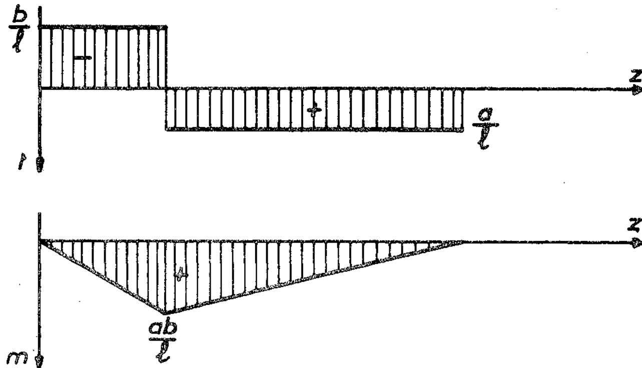


2) Calcul de la flèche au droit de P

L'état unitaire servant à faire ce calcul est le suivant :



Les diagrammes correspondants sont :



L'application de la formule de Maxwell-Mohr, nous donne alors :

$$f = \int_G^D \frac{Mm}{EI}\, dz + \int_G^D \frac{Tt}{GS}\, dz$$

soit, d'après les tableaux :

$$f = \frac{1}{3}\ \frac{Pa^2b^2}{EI\ l} + \frac{1}{GS}\left(\frac{Pb^2}{l^2}\,a + \frac{Pa^2}{l^2}\,b\right)$$

$$= \frac{1}{3}\ \frac{Pa^2b^2}{EIl} + \frac{Pab}{GSl}$$

On peut se rendre compte par un calcul numérique que le 2e terme est négligeable par rapport au premier ; et on ne conserve en général que le premier :

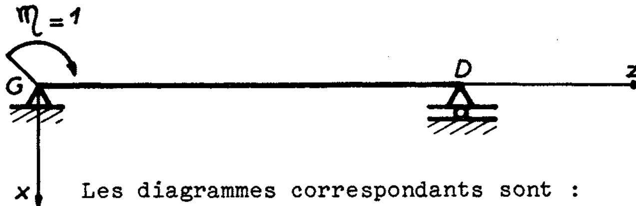
$$f = \frac{P\ a^2b^2}{3\ EI\ l}$$

Si la charge est appliquée au milieu de la poutre, $a = b = \frac{l}{2}$ et

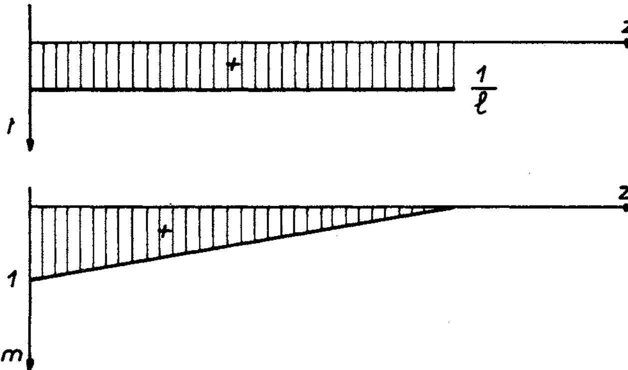
$$f = \frac{P\ l^3}{48\ EI}$$

3) Calcul de la rotation en G

L'état unitaire de comparaison est :



Les diagrammes correspondants sont :



d'où par application de la formule de Maxwell-Mohr :

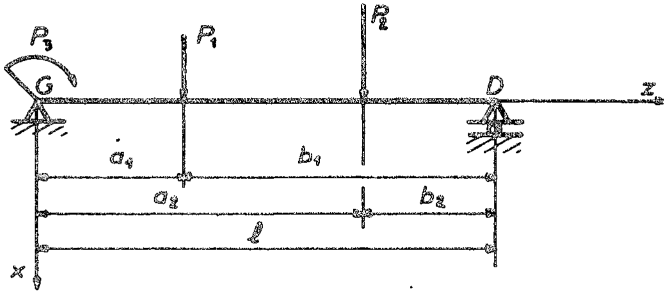
$$\theta_G = \int_G^D \frac{Mm}{EI}\,dz + \int_G^D \frac{Tt}{GS}\,dz$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{Pab}{EI}\left(1 + \frac{b}{l}\right) - \frac{Pba}{l^2} + \frac{Pab}{l^2}$$

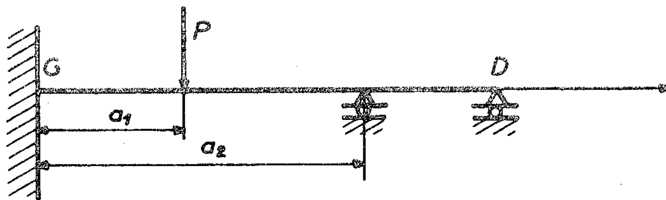
$$= \frac{1}{6}\,\frac{Pab}{EI}\left(1 + \frac{b}{l}\right)$$

Exercices :

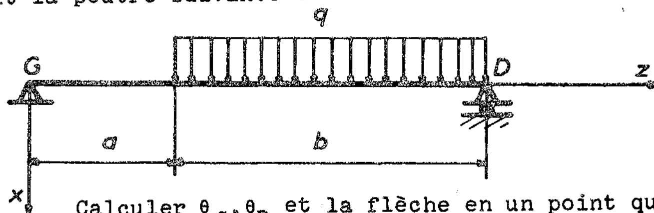
1) Déterminer la matrice de flexibilité relative aux trois charges généralisées suivantes (on ne tiendra compte que du moment fléchissant).



En déduire la résolution du système hyperstatique suivant :

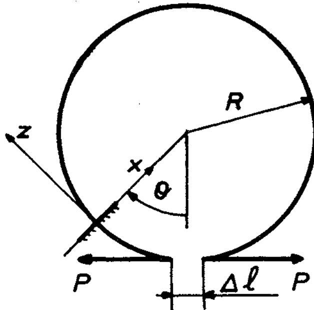


2) Soit la poutre suivante :



Calculer θ_G, θ_D et la flèche en un point quelconque d'abscisse z.

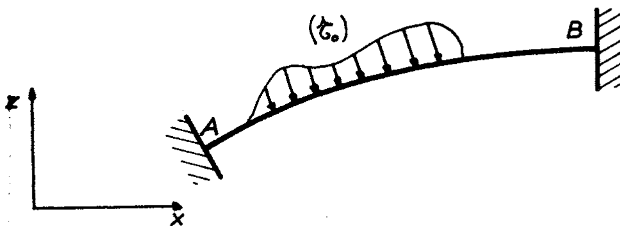
3) Soit la poutre circulaire suivante (segment de piston)



Calculer l'écartement Δl (On ne tiendra compte que du moment fléchissant).

2.4.11. - Résolution de systèmes hyperstatiques
Méthode des forces ou des groupes d'état

Donnons en le principe sur un système plan à deux encastrements.

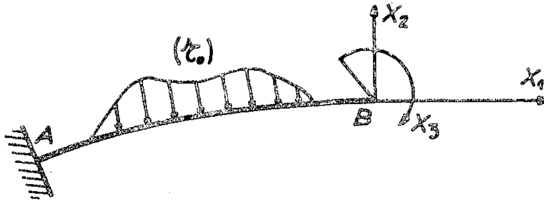


C'est un système hyperstatique de degré 3.

On commence par supprimer des liaisons en nombre égal au degré d'hyperstaticité, pour obtenir un système isostatique qu'on appelle système isostatique de base ou état 0.

Par exemple, on peut ici supprimer l'encastrement en B. Le système obtenu sera équivalent au système donné, à

condition d'appliquer en B trois réactions, qui seront les <u>inconnues hyperstatiques</u>, telles que le déplacement de B soit nul.



Avec $\begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \\ D_3 = 0 \end{cases}$

Or les déplacements de B peuvent s'écrire :

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}}_{} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ f_{30} \end{bmatrix}}_{} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Matrice de flexibilité relative aux inconnues hyperstatiques.

Déplacement de B dû à (τ_o)

soit :

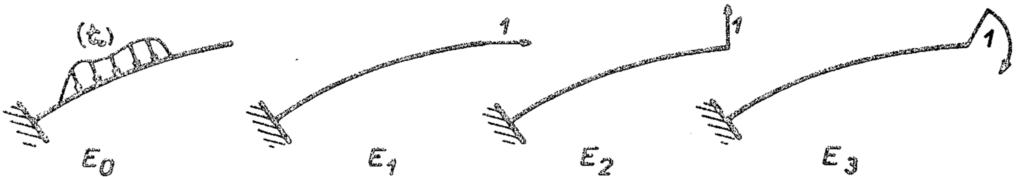
$$\begin{bmatrix} f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \qquad (193)$$

C'est un système inéaire qui permet le calcul des inconnues hyperstatiques.

<u>Remarques</u> :

1) Nous avons à calculer tous les coefficients d'influence f_{ij}. Pour ceci, nous devons étudier l'état isostatique de base avec son chargement (τ_o), plus un nombre d'états complémentaires égal au nombre d'inconnues hyperstatiques.

Dans le cas précédent, il faut donc étudier les diagrammes fondamentaux des 4 états suivants :



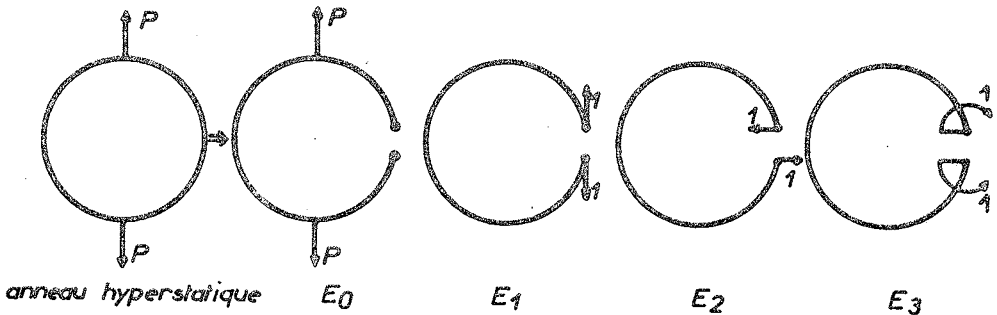
D'une façon générale, f_{ij} est obtenu en faisant le produit de l'état E_i par l'état E_j.

D'autre part, ayant déterminé les inconnues hyperstatiques par résolution du système (193), on peut obtenir les diagrammes fondamentaux pour la structure réelle, par superposition :

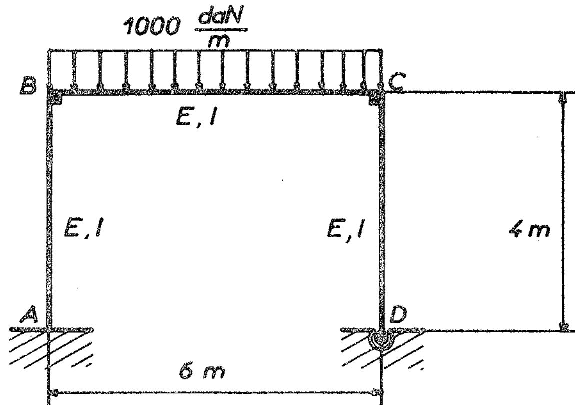
$$(E_{réel}) = (E_o) + X_1\ (E_1) + X_2\ (E_2) + X_3\ (E_3) \quad (194)$$

2) <u>Hyperstaticité interne</u> :

Nous pouvons par cette méthode, résoudre les problèmes d'anneaux ou de cadres hyperstatiques. Un anneau fermé est un système hyperstatique de degré 3 et, pour le résoudre, on peut considérer les états suivants :



Exercice : Résoudre le système hyperstatique suivant :



On ne tiendra compte que du moment fléchissant.
Tracer le diagramme des moments fléchissants totaux.